

□ LOGIQUE & CALCUL

La suite de Stern-Brocot, sœur de Fibonacci

Si la définition de la suite diatomique de Stern est simple, sa structure est riche de propriétés. Elle est le nœud central d'un vaste réseau de relations dont on découvre chaque année des prolongements.

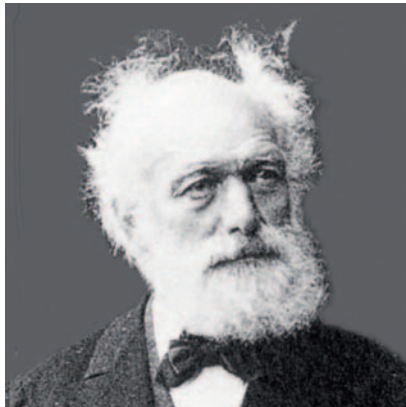
Jean-Paul DELAHAYE

Tout le monde connaît la suite de Leonardo Fibonacci, définie par : $f_0 = 0$; $f_1 = 1$; $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$. Chaque terme est la somme des deux précédents et le début de la suite est 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... Elle apparaît dans des contextes variés et possède une multitude de propriétés remarquables, au point qu'une revue de mathématiques lui est entièrement dédiée : le *Fibonacci Quarterly*, journal officiel de la *Fibonacci Association* (<http://www.fq.math.ca/>).

Cette merveille arithmétique et combinatoire a une sœur, moins célèbre, mais aussi intéressante, la suite diatomique de Stern. Elle est connue aussi sous le nom de suite de Stern-Brocot ou fonction *fusc*. Comme la suite de Fibonacci, on la retrouve au centre d'un réseau infini de relations qui en font l'un des plus fascinants objets des mathématiques discrètes. Sa définition ressemble à celle de la suite de Fibonacci. La suite diatomique de Stern est le résultat des petites équations suivantes :

$$s_0 = 0; s_1 = 1; s_{2n} = s_n; s_{2n+1} = s_n + s_{n+1}.$$

Autrement dit, elle commence par 0, 1, puis, pour la connaître en m , si m est pair, on regarde sa valeur en $m/2$, et si m est impair, on coupe m en deux parties aussi égales que possible, on regarde les valeurs correspondantes et on additionne.



Moritz Stern (1807-1894)

Le nom de la suite est celui du mathématicien Moritz Stern qui l'a mentionnée et étudiée dans un article de 1858. Stern était un élève de Gauss, à qui il succéda à la tête du Département de mathématiques de Göttingen. Quant à Achille Brocot (1817-1878), il était horloger et s'intéressait aux fractions pour ses mouvements d'horloge. Depuis une dizaine d'années, la suite a fait l'objet d'une attention soutenue, conduisant à de nombreuses et jolies découvertes. L'adjectif diatomique provient de la formule $s_{2n+1} = s_n + s_{n+1}$, qui signifie que les termes nouveaux de la suite naissent de la somme de deux termes, ou atomes, précédents.

Les premiers éléments de la suite sont indiqués au bas de la page. Elle semble

complexe et impénétrable. Elle est bien sûr recensée dans l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane, sous le numéro A002487 (voir <http://oeis.org/>). Son graphe est un peu plus parlant (voir l'encadré 1), car on perçoit des régularités et même un aspect fractal : des formes semblables apparaissent à diverses échelles.

Dispositions en tableaux

Il existe plusieurs méthodes pour en disposer les termes qui aident à en dévoiler l'ordre secret. La première disposition graphique révélatrice, nommée *Tableau tassé de Stern*, consiste à oublier le 0 du début et à faire des retours à la ligne après 1, 2, 4, 8 termes, etc. **A**.

On remarque que la somme des éléments de la ligne n vaut exactement 3^n , ce qu'un peu de travail mathématique permet de

```

1
1 2
1 3 2 3
1 4 3 5 2 5 3 4
1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5
1 6 5 9 4 11 7 10 3 11 8 13 5 12 7 9 2 9 7...
1 7 6 11 5 14 9 13 4 15 11 18 7 17 10 13 3 14 11 ...
1 8 7 13 6 17 11 16 5 19 14 23 9 21 13 17 4 19 15 ...
1 9 8 15 7 20 13 19 6 23 17 28 11 25 16 21 5 24 19 ...
1 10 9 17 8 23 15 22 7 27 20 33 13 29 19 25 6 29 23 ...
1 11 10 19 9 26 17 25 8 31 23 38 15 34 22 29 7 34 27 ...

```

1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, 5, 4, 7, 3, 8, 5, 7, 2, 7, 5, 8, 3, 7, 4, 5, 1, 6, 5, 9, 4, 11, 7, 10, 3, 11, 8, 13, 5, 12, 7,

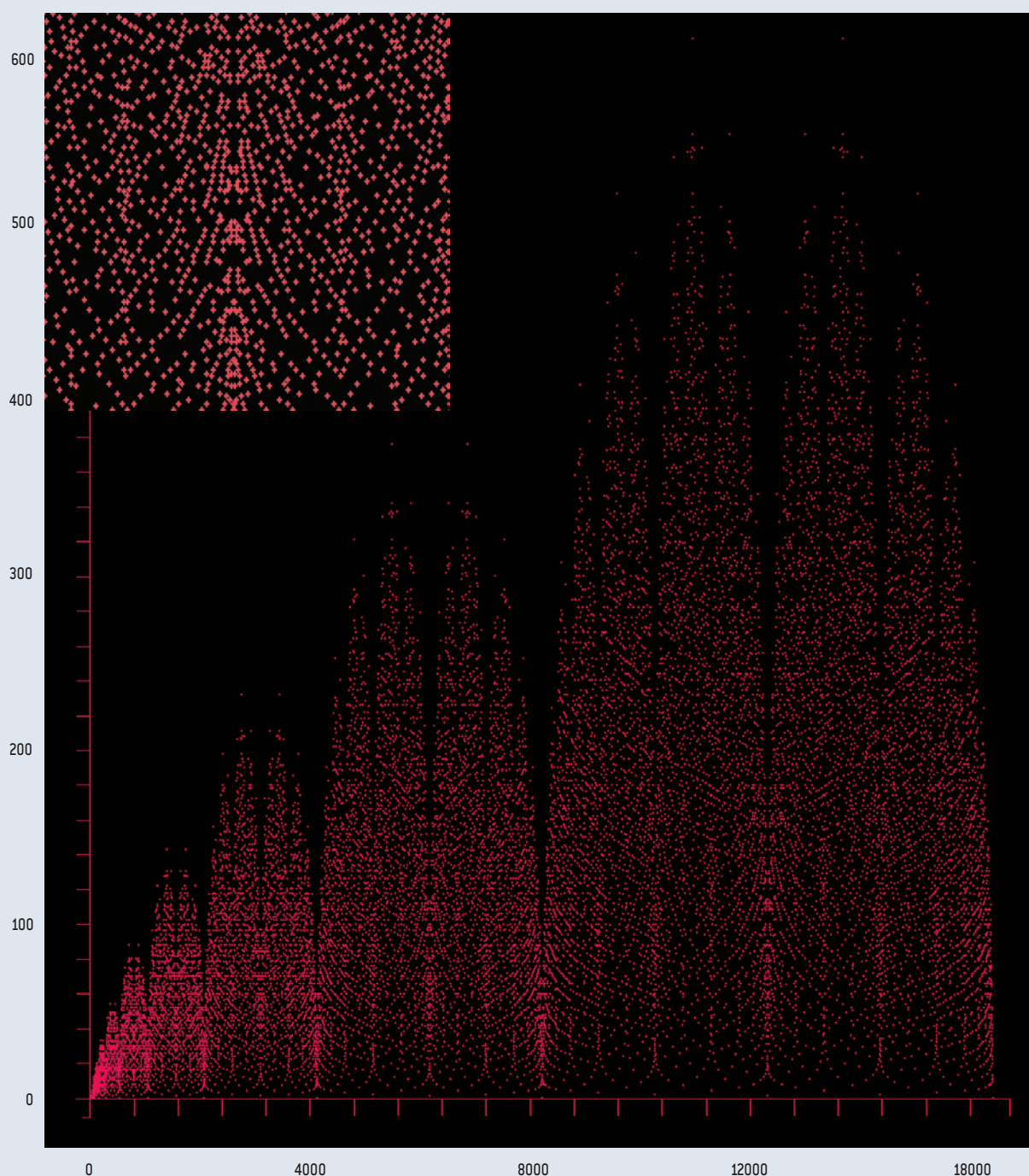
9, 2, 9, 7, 12, 5, 13, 8, 11, 3, 10, 7, 11, 4, 9, 5, 6, 1, 7, 6, 11, 5, 14, 9, 13, 4, 15, 11, 18, 7, 17, 10, 13, 3, 14, 11, 19, 8, 21,

Regards

1. Les premiers éléments de la suite de Stern-Brocot

Dans cette représentation des premiers éléments de la suite diatomique de Stern-Brocot, on porte en abscisse le numéro de chaque élément dans la suite et en ordonnée sa valeur. On voit apparaître des structures à plusieurs échelles, comme c'est le cas pour les images frac-

tales. Ces structures témoignent que, malgré son apparence désordonnée, la suite diatomique de Stern contient un ordre caché et même une simplicité inattendue. L'intérêt qu'on lui porte depuis quelques années le confirme spectaculairement.



Regards

démontrer. Toutes les propriétés que nous allons mentionner ont été démontrées (voir par exemple l'article de Sam Northshield indiqué dans la bibliographie). Ces démonstrations ne présentent pas de difficultés exceptionnelles : dans ce domaine, lorsqu'une propriété comme celle des puissances de 3 est identifiée, la prouver n'est qu'une affaire d'effort et de patience que la communauté mathématique est presque certaine de voir aboutir. Le jeu de la recherche dans l'étude d'une telle suite se situe bien plus dans la découverte des propriétés que dans leur démonstration.

Une seconde propriété tout à fait remarquable du *Tableau tassé de Stern* est que chaque colonne est une suite arithmétique, c'est-à-dire dont la différence entre deux termes consécutifs est constante. La quatrième colonne est par exemple la suite arithmétique 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... c'est-à-dire celle de tous les nombres impairs. La raison (différence entre deux termes consécutifs) de la suite arithmétique de la colonne 0 est 0 ; celle de la colonne 1 est 1 ; ensuite viennent les raisons 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, ... suite que vous reconnaissez (la suite de Stern). N'est-ce pas amusant et miraculeux ?

Le tableau précédent se dispose aussi en étalant les nombres de chaque ligne et en ajoutant un 1 (en rouge) au bout de chacune, ce qui conduit à l'arbre diatomique de Stern **B**.

Des liens avec le triangle de Pascal

Chaque ligne est un palindrome, ce qui est une propriété intéressante... qui a été démontrée. Quand la suite est ainsi disposée, bien d'autres relations apparaissent. Cet arbre diatomique de Stern se construit indépendamment des formules données plus haut, en utilisant un procédé proche de celui qui conduit au fameux triangle de Pascal. Rappelons que pour le triangle de Pascal **C**, chaque élément est la somme de ses deux voisins sur la ligne au-dessus (par exemple, 35 est le résultat de $15 + 20$). On peut le disposer en triangle rectangle ou isocèle.

Dans l'arbre diatomique de Stern, chaque ligne nouvelle est obtenue en recopiant la ligne précédente et en insérant un nouvel entier entre chaque nombre qui est simplement la somme de ceux entre lesquels on l'insère. Cette proximité avec le triangle de

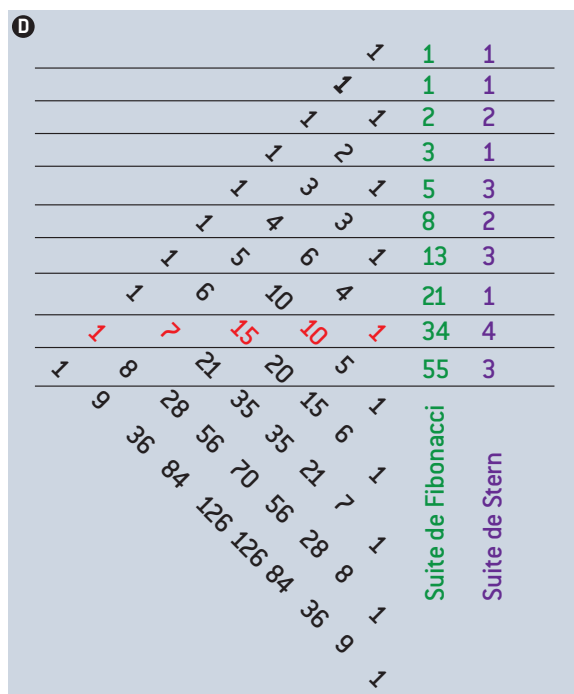
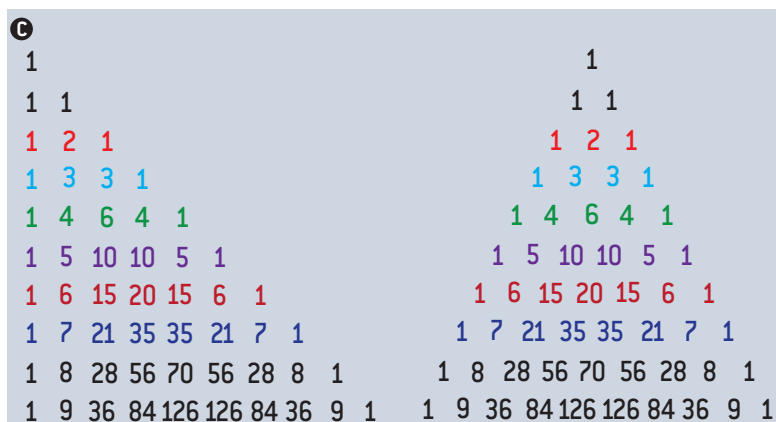
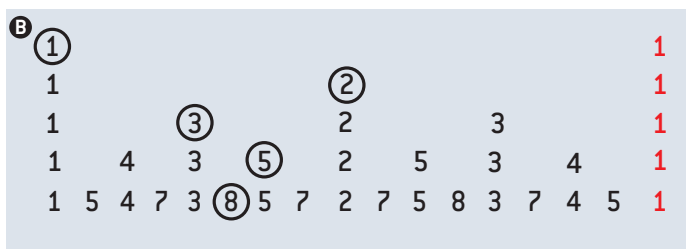
Pascal se manifeste de multiples façons, et les trois structures du triangle de Pascal, de la suite de Fibonacci et de la suite diatomique de Stern entretiennent de solides relations « amicales ». Voici quatre de ces étonnants liens entre joyaux des mathématiques discrètes.

1) Les maximums des lignes du tableau tassé de Stern (ou, ce qui revient au même, de l'arbre diatomique de Stern) sont exactement les termes de la suite de Fibonacci 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... On les a encadrés **B**.

2) En faisant la somme des coefficients du triangle de Pascal situés sur les obliques montantes (l'une d'elles est dessinée en rouge, **D**), on obtient les termes de la suite de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

3) Si on compte le nombre de nombres impairs sur ces mêmes obliques montantes, on trouve exactement les termes de la suite diatomique de Stern, qui est donc cachée dans le triangle de Pascal comme l'est la suite de Fibonacci.

4) Cette dernière propriété conduit d'ailleurs à une formule explicite pour le n -ième terme s_n de la suite diatomique de Stern, qui en constitue une nouvelle défi-



Regards

2. Le graphe infini de la suite de Stern

Il existe des interprétations graphiques assez simples de la suite diatomique de Stern. On considère le graphe (1) infini dessiné ci-dessous dont le principe de construction est immédiat. On peut le voir au choix :

— comme un point de départ qui donne lieu à trois branches faisant des angles de 45° , qui eux-mêmes se séparent chacune en trois branches du même type, etc.

— comme un pavage d'un triangle isocèle rectangle par des trapèzes rectangles tous semblables et de plus en plus petits.

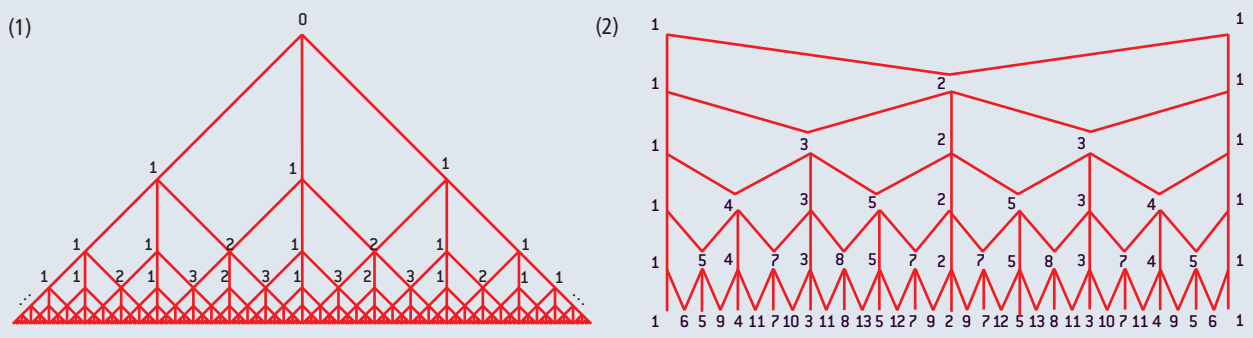
La suite diatomique de Stern y est cachée. En comptant le nombre de chemins descendants permettant de joindre le sommet de la figure à un nœud du graphe, on découvre (et l'on démontre) que chaque ligne lue jusqu'à la moitié est le début de la

série de Stern (à l'exception du 0) et donc que la ligne n du graphe indique 2^n termes de la série.

Le graphe (2), l'arbre diatomique de Stern, possède une propriété du même type, sauf que cette fois la suite de Stern s'obtient simplement en mettant bout à bout les nombres de chemins descendants écrits aux nœuds. On peut aussi, pour obtenir une nouvelle

ligne à partir de la précédente, recopier la ligne dont on part (en ayant éliminé les extrémités) et insérer entre chaque paire d'éléments consécutifs (a, b) la somme $a + b$.

Un autre graphe infini, que nous laissons au lecteur le soin de deviner et de dessiner, donne les coefficients du triangle de Pascal par ce procédé de décompte des chemins descendants.



niton à partir des coefficients de binôme de Newton (les éléments du triangle de Pascal) :

$$s_n = \sum_{2i+j=n-1} \left[\binom{i+j}{i} \bmod 2 \right]$$

De nombreux et remarquables liens existent aussi entre la suite diatomique de Stern et le système de numération binaire. Nous allons en détailler trois qui attestent à nouveau qu'en ces domaines des mathématiques discrètes, « Tout est dans tout » et qu'un étroit et serré système de relations fait passer rapidement d'une structure à une autre... pour qui sait ouvrir les yeux.

La numération binaire

La valeur de s_n est exactement le nombre de représentations de $n - 1$ en notation binaire généralisée, c'est-à-dire comme somme de puissances de 2 prises 0, 1 ou 2 fois (la notation binaire est la représentation de n en somme de puissances de 2, prises chacune 0 ou 1 fois). Expliquons cela.

Le nombre $8 = 9 - 1$ peut s'écrire de quatre façons en notation binaire généralisée :

a) $8 = 8$, qui donne la notation binaire 1000_2 (le 2 en indice est là pour éviter la confusion entre notations binaires et décimales) ;

b) $8 = 4 + 4$, qui donne la notation binaire généralisée 200_2 ;

c) $8 = 4 + 2 + 2$, qui donne 120_2 ;

d) $8 = 4 + 2 + 1 + 1$, qui donne 112_2 .

Qu'il y ait quatre façons d'écrire $8 = 9 - 1$ en notation binaire généralisée signifie que $s_9 = 4$.

Dans son merveilleux livre, publié en 2003 et entièrement consacré aux constantes mathématiques, Steven Finch note que la valeur de s_n est aussi le nombre de façons d'extraire de l'écriture binaire de n une suite alternée de 1 et de 0 commençant et se terminant par 1.

Prenons l'exemple du nombre 17, qui s'écrit 10001_2 en base 2. On peut extraire de cette notation cinq sous-suites alternées (en rouge) commençant et finissant par 1 : **10001** **10001** **10001** **10001** **10001**. On en déduit $s_{17} = 5$.

Un autre lien extraordinaire entre la base de numération 2 et la suite diatomique de

Stern est celui qui permet, à partir de n écrit en binaire, d'avoir immédiatement s_n . Partant de n , par exemple 98, on l'écrit en base 2 : 1100010_2 . On compte le nombre de 1 qui commencent la suite 1100010_2 , il y en a 2, $a_0 = 2$; on compte le nombre de 0 qui suivent, $a_1 = 3$; puis le nombre de 1 qui suivent, $a_2 = 1$; puis le nombre de 0 qui suivent, $a_3 = 1$, puis enfin le nombre de 1 qui suivent, $a_4 = 0$. On considère alors la fraction :

$$a_4 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_0}}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}} = \frac{9}{16}$$

Cette fraction permet d'affirmer que la valeur de s_{98} est 9, le numérateur. En prime, le terme suivant est le dénominateur : $s_{99} = 16$. Pour un entier n quelconque, on écrit n sous forme binaire, et la fraction associée comme précédemment : son numérateur et son dénominateur sont les termes de rang n et $n + 1$ de la suite diatomique de Stern.

On vérifie qu'il en est bien ainsi, mais, comme on l'a déjà dit, le procédé n'est pas

Regards

seulement constaté, mais dûment démontré. N'est-ce pas magique ?

L'énumération parfaite des nombres rationnels

Nous arrivons à la plus remarquable propriété de la suite diatomique de Stern, qui se rapporte à l'énumération des fractions. Les nombres fractionnaires ou plus communément nommés nombres rationnels sont les quotients de deux nombres entiers (comme $1/2$, $5/1$, $23/165$...). En écrivant toutes les fractions positives dans un tableau à double entrée (une pour le numérateur, l'autre pour le dénominateur) et en parcourant successivement les diagonales montantes du tableau (sommes du numérateur et du dénominateur égales), on obtient une énumération des nombres rationnels **E**. Elle montre qu'ils ne sont pas « vraiment » plus nombreux que les nombres entiers (même infini dénombrable).

E	1	2	3	4	5	6	7	...
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	...
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	...
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	...
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	...
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	...
6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	...
7	7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	...

L'énumération commence par $1/1$, $2/1$, $1/2$, $3/1$, $2/2$, $1/3$, $4/1$, $3/2$, $2/3$, $1/4$, $5/1$, $4/2$, $3/3$, $2/4$, $1/5$, ... Dans cette liste des fractions, du fait des simplifications possibles ($2/2 = 1/1$, $2/4 = 1/2$, etc.), certains nombres rationnels sont répétés. Ce n'est pas très grave, car on peut reprendre l'énumération en décidant de ne pas garder les nombres qui se trouveront déjà mentionnés, c'est-à-dire ceux qui se simplifient. Le début de cette énumération sans répétition devient alors : $1/1$, $2/1$, $1/2$, $3/1$, $1/3$, $4/1$, $3/2$, $2/3$, $1/4$, $5/1$, $1/5$, ... Le résultat de ce nettoyage est une bijection entre les entiers positifs et les nombres rationnels positifs : à chaque nombre entier n positif, le n -ième nombre de l'énumération est un nombre rationnel simplifié (une fraction irréductible) et il n'y a ni oubli ni répétition.

Un défaut de cette méthode de mise en correspondance nombre à nombre, entre les entiers et les rationnels, est qu'il est impossible, à moins d'un assez gros travail, de connaître quel est le nombre rationnel qui vient par exemple en position mille (et est donc associé à 1 000). Il est encore plus difficile d'avoir une formule générale et simple donnant le n -ième terme de l'énumération.

Très étonnamment, la suite diatomique de Stern fournit une solution à ce problème : si on énumère les rationnels en prenant successivement : s_0/s_1 , s_1/s_2 , s_2/s_3 , s_3/s_4 , s_4/s_5 , s_5/s_6 , s_6/s_7 , s_7/s_8 , s_8/s_9 , s_9/s_{10} , ... c'est-à-dire : $1/1$, $1/2$, $2/1$, $1/3$, $3/2$, $2/3$, $3/1$, $1/4$, $4/3$, ..., alors la liste obtenue est parfaite. Il n'y a ni oublis, ni répétitions, ni fractions simplifiables ; c'est une mise en ordre idéale de l'infinité des nombres rationnels.

Cette fois, on peut savoir sans mal que le n -ième élément énuméré est s_{n-1}/s_n , rapport dont on connaît rapidement la valeur à partir du développement binaire de n sans passer par les précédents ; voir plus haut l'exemple du calcul de s_{99} .

Cette merveilleuse liste des fractions incita Stern en 1858 à introduire sa suite diatomique qui donne lieu à de jolies représentations graphiques de l'ensemble des nombres rationnels positifs. Partant de l'arbre diatomique de Stern (sans sa dernière colonne de 1), en divisant chaque élément par le suivant, on obtient un

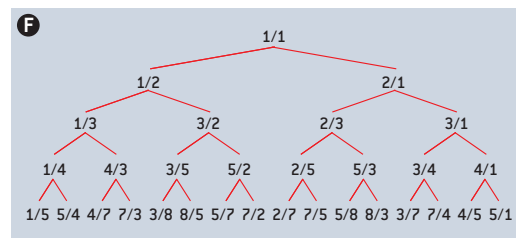


tableau infini de tous les nombres rationnels **F**. Ce tableau est parfois nommé arbre de Calting-Wilf, car Neil Calting et Herbert Wilf l'ont étudié en 2000.

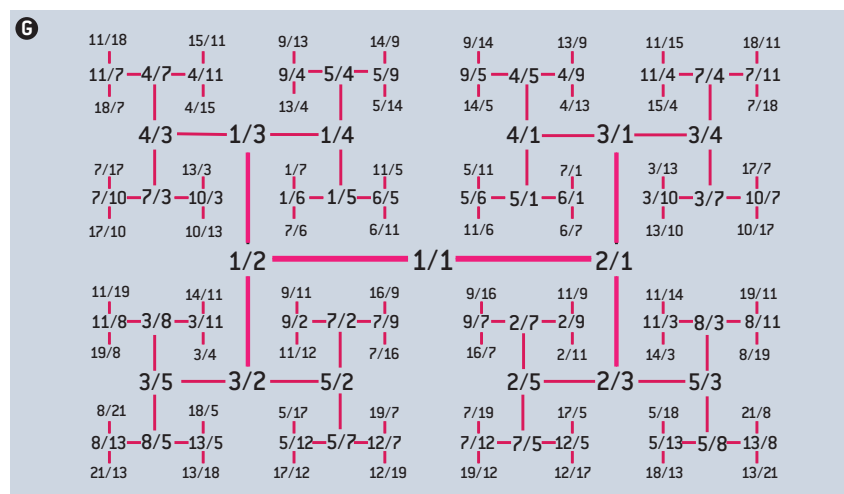
La représentation fractale de l'arbre binaire en fait apparaître un plus grand nombre d'éléments **G**.

Plus intéressante encore, la disposition en spirale rend apparent à la fois l'arbre et l'énumération linéaire de tous les rationnels **H**.

L'arbre de Calting-Wilf possède une magnifique propriété qui suffit d'ailleurs à l'engendrer à partir de sa racine $1/1$: les deux descendants d'une fraction a/b de l'arbre sont dans l'ordre $a/(a+b)$ et $(a+b)/b$. Ce procédé étonnamment simple fournit indirectement une nouvelle méthode pour engendrer la suite diatomique de Stern.

Une autre formule surprenante par sa simplicité permet directement de passer d'un élément de l'énumération magique des rationnels au suivant : $f(x) = 1/(1 + 2[x] - x)$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x).

Autrement dit, en partant de $1/1$ et en appliquant la fonction f , on obtient d'abord $1/2$, puis en l'appliquant à nouveau à ce



Regards

