LOGIQUE & CALCUL

Une théorie rêvée du calcul

Les mathématiciens créent des mondes imaginaires et s'interrogent sur ce qui s'y passe. Celui conçu par Jérôme Durand-Lose concilie simplicité et richesse infinie.

Jean-Paul DELAHAYE

De simples particules interagissant selon des règles fixées permettent-elles de réaliser des calculs et, si oui, lesquels ? Pour le savoir, Jérôme Durand-Lose, professeur à l'Université d'Orléans, a proposé le modèle mathématique d'un univers ne contenant que des particules mobiles qu'il nomme « signaux ». Dans ce monde imaginaire, l'espace est une droite (un espace à une dimension). La droite où les signaux circulent est assimilée à la droite mathématique, c'est-à-dire à l'ensemble infini des nombres réels (1, –7, 23/11, $\sqrt{3}$, etc.). Le temps est lui aussi continu et représenté à l'aide de nombres réels. Cette idéalisation n'est pas sans conséquence, mais elle est habituelle en physique où ces nombres sont utilisés en particulier dans les représentations de l'espace et du temps.

Les résultats obtenus par J. Durand-Lose et ses étudiants nous montrent les risques inhérents au passage de modèles où tout est discret – espaces composés de points isolés, temps représenté par des entiers – à des espaces continus envisagés sans restriction, avec toutes les richesses que les mathématiciens y découvrent et qui n'ont pas toutes de correspondance en physique.

Pour saisir les mondes étudiés par J. Durand-Lose depuis plus de dix ans, observons en détail l'un d'eux, qui aura la propriété de se reproduire périodiquement. Les signaux qu'il utilise sont au nombre de sept. Ce sont des points mobiles. On les dessine de couleurs différentes et on les désigne par leur couleur. Chaque signal a sa propre vitesse et il n'en change jamais. Cette vitesse est un nombre réel. Dans notre exemple :

– le signal *noir* a la vitesse nulle ;

– le *bleu* et le *jaune* ont la vitesse 1 ; ils se déplacent vers la droite d'une unité de longueur par unité de temps ;

– le *vert* a la vitesse 2 ;

– le *rouge* a la vitesse – 2 ; il se déplace vers la gauche de deux unités de longueur par unité de temps ;

– l'*orange* et le *violet* ont la vitesse – 1.

Les signaux interagissent quand ils se rencontrent et, après annihilation, donnent naissance à de nouveaux signaux. On peut voir ces signaux comme des particules ponctuelles. La situation est analogue à celle de la physique des particules, à la nuance près que le mathématicien conçoit et étudie en toute liberté les particules qui l'intéressent, alors que le physicien mène des expériences pour savoir quelles sont les particules existant réellement.

Dressons la liste des interactions possibles des sept types de signaux de notre exemple. Chaque ligne indique ce que la collision de deux signaux *(à gauche)* produit comme nouveaux signaux *(à droite)*.

Règle 1 : *bleu*, *noir* → *noir*, *vert*
Règle 2 : *vert*, *noir* → *noir*, *jaune*
Règle 3 : *jaune*, *noir* → *orange*, *noir*
Règle 4 : *noir*, *orange* → *rouge*, *noir*
Règle 5 : *noir*, *rouge* → *violet*, *noir*
Règle 6 : *noir*, *violet* → *noir*, *bleu*

Quand une collision entre deux signaux n'est pas mentionnée – c'est le cas pour *jaune*, *orange* – les deux signaux se croisent sans interagir. Quand plus de deux signaux se rencontrent en un point, on considère que toutes les règles correspondant à deux signaux présents et interagissants s'appliquent. Par exemple, si les signaux *orange*, *vert* et *noir* se rencontrent, les règles 2 et 4 s'appliquent, d'où la règle :

vert, noir, orange → *noir, jaune, rouge.*

De telles super-règles peuvent être introduites si on le souhaite. L'évolution de l'univers à une dimension se visualise à l'aide d'un schéma où, par convention, l'écoulement du temps correspond au déplacement vers le haut. Le schéma *a* de l'encadré 1 montre ce qui se produit dans le cas particulier que nous venons de définir quand on place sept signaux aux positions initiales suivantes : quatre signaux *noir* en 0, 1, 3 et 4 ; un signal *bleu* en 0 ; un signal *vert* en 1 ; un signal *jaune* en 3.

Éternel recommencement

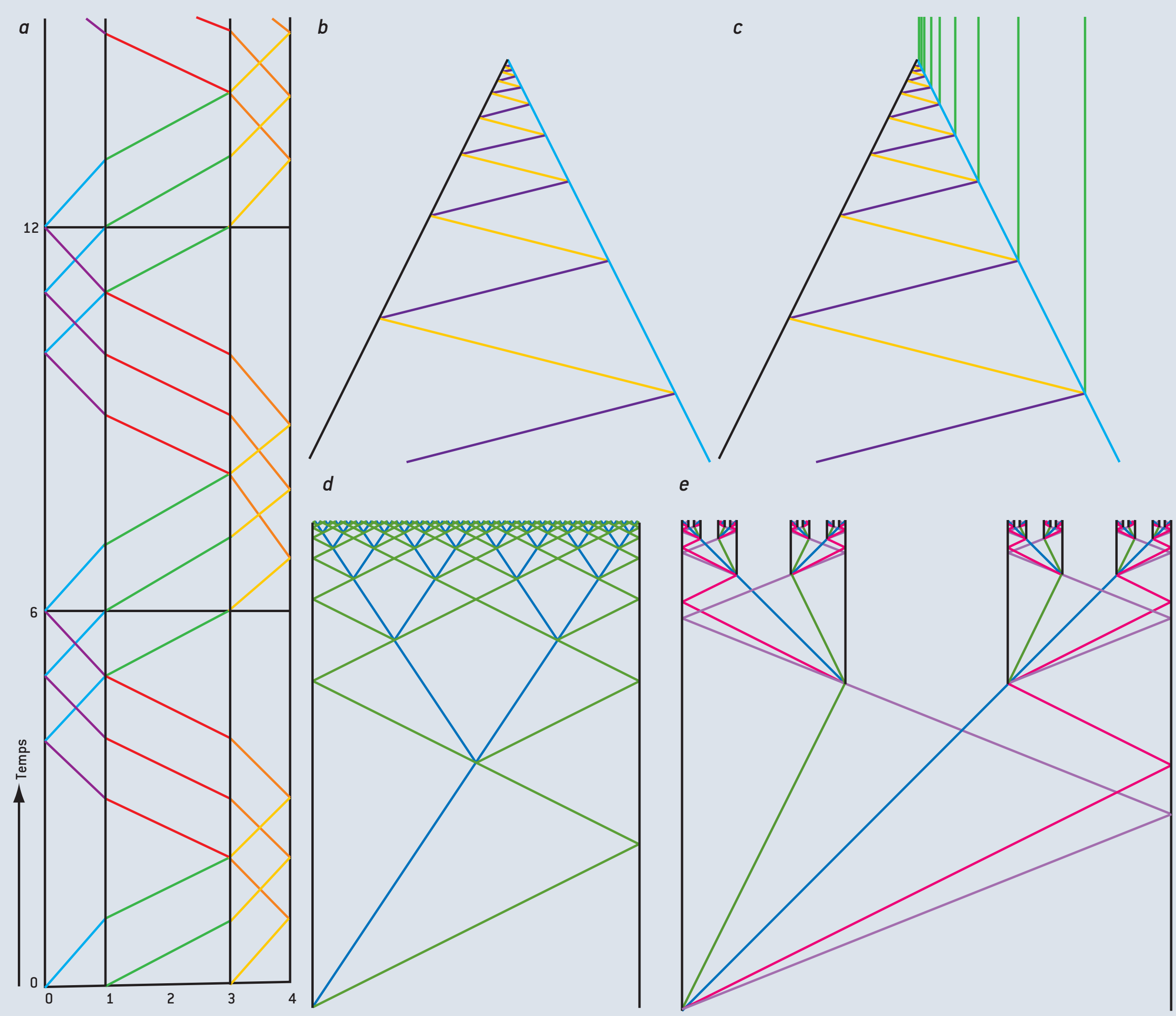
On observe qu'après une unité de temps, le signal *bleu* parti de la position 0 rencontre le signal *noir* qui est immobile en position 1. Leur collision donne naissance (d'après la règle 1) à un signal *noir* (qui prolonge donc le signal *noir* en position 1) et un signal *vert* deux fois plus rapide que le *bleu,* qui disparaît. Il y a de même interaction, à l'instant 1, entre le signal *vert* parti de la position 1 et

1. Le petit monde des signaux

Le monde des signaux inventé par Jérôme Durand-Lose est unidimensionnel. On représente son évolution en plaçant l'axe du temps verticalement. Dans notre premier exemple *(a)*, on a sept particules (ou signaux) à l'instant initial ($t = 0$). Chacune, selon sa couleur, a une vitesse propre. Par exemple, les signaux *jaune* se déplacent vers la droite à la vitesse d'une unité de longueur par unité de temps (vitesse 1). Lorsque deux signaux se rencontrent, ils interagissent, ce qui donne naissance à des signaux différents selon des règles fixées une fois pour toutes. Ici, la rencontre d'un signal *bleu* de vitesse +1 avec un signal *noir* de vitesse 0 produit un signal *vert* de vitesse +2 et un signal *noir* (de vitesse 0). Le petit monde dessiné ici est décrit en détail dans le texte de l'article. Au bout de six unités de temps, il retrouve l'état initial, et donc tout se répète indéfiniment toutes les six unités de temps.

Le choix des signaux et de leur configuration initiale permet de calculer. Cette programmation géométrique est intéressante, car elle permet de profiter du caractère continu de l'espace-support et donc de toute la richesse de l'ensemble des nombres réels.

Dans ce monde des signaux, quatre d'entre eux peuvent jouer une partie de ping-pong en produisant un point d'accumulation d'interactions *(b)*. En modifiant légèrement les règles (lorsque le *bleu* et le *violet* du dessin *(b)* se rencontrent, au lieu de produire un *jaune* et un *bleu*, on convient qu'ils produisent un *jaune*, un *bleu* et un *vert*, ce qui donne alors le dessin *(c)*), il est facile d'obtenir qu'un nombre fini de signaux en produisent une infinité en un temps fini. Une forme de calcul infini est donc possible dans le monde des signaux de J. Durand-Lose. Un autre système assez simple de signaux produit une ligne complète de points d'accumulation *(d)*. Un autre encore produit un ensemble de points d'accumulation correspondant exactement à l'ensemble triadique de Cantor *(e)*.



le signal *noir* immobile en position 3 ; elle donne naissance, d'après la règle 2, à un signal *noir* et un signal *jaune*. Etc.

La définition des signaux, leurs positions initiales et les règles d'interaction déterminent parfaitement ce qui se passe au-delà de l'instant 0. Les mondes que l'on fabrique à l'aide de ce type de modèles sont déterministes : tout est donné au départ, aucun hasard n'intervient. Pour obtenir de ces mondes qu'ils calculent, il faudra donc soigneusement choisir les signaux, leurs règles et les positions initiales.

Dans notre exemple, le calcul produit une évolution assez simple à analyser. Les signaux *noir* sont fixes et se perpétuent indéfiniment. Les signaux initiaux *bleu*, *vert* et *jaune* se transforment en signaux d'autres couleurs qui sont réfléchis sur les signaux *noir* et reviennent simultanément à leur point de départ en six étapes. Au bout de six unités de temps, l'univers se retrouve donc dans son état initial : il est cyclique. Cet univers rejoue indéfiniment les mêmes événements. C'est un peu décevant, mais ce n'est qu'un début.

Dans les autres schémas représentant des univers de signaux *(voir l'encadré 1)*, nous n'indiquerons pas toujours la liste des signaux, ni leurs vitesses et règles d'interaction, car en regardant les dessins, on reconstitue sans mal ces données. Bien sûr, pour qu'un dessin représente une évolution possible dans un monde de signaux, il faut que les mêmes règles exactement y soient appliquées d'un endroit à l'autre du dessin.

Points d'accumulation

La figure *b* illustre un phénomène très important pour la suite : la possibilité d'obtenir des points d'accumulation de collisions. Les quatre signaux de ce monde jouent une sorte de ping-pong de plus en plus rapide. Le signal *noir* et le signal *bleu* se rapprochent. Dans l'espace créé entre eux, le signal *violet* qui devient *jaune* puis à nouveau *violet*, puis à nouveau *jaune*, etc., interagit de plus en plus rapidement avec les signaux *noir* et *bleu*. Une infinité de collisions entre signaux se produisent avant un instant particulier qu'on dénomme *point d'accumulation*, et qui correspond exactement au temps que le signal *noir* met à rejoindre le signal *bleu*. Que se passe-t-il en ce point limite ? Aucune des règles du jeu ne l'indique. Il faut donc compléter ces règles pour traiter de tels cas. Le plus simple est de convenir que tous les signaux disparaissent, comme s'ils tombaient dans un trou noir.

Le schéma *c* montre que, même avec cette convention, on ne peut éviter qu'apparaissent des situations où une infinité de signaux sont créés en un temps fini. Notons cependant que si l'on choisit d'affecter une masse à chaque particule et qu'on impose que chaque règle préserve la masse totale, alors ce type de phénomènes devient impossible : partant d'un nombre fini de particules ayant chacune une masse finie, on ne peut aboutir à une infinité de particules.

Le schéma *d* montre une situation extraordinaire où non seulement un point d'accumulation est créé, mais où c'est tout un segment qui se remplit de points d'accumulation. Le schéma *e* est encore plus troublant : l'ensemble des points d'accumulation est l'ensemble triadique de Cantor (mentionné dans l'article du mois de février 2014) qui est la première fractale, imaginée il y a bientôt 150 ans.

On doit conclure de ces exemples que les mondes de signaux de J. Durand-Lose ne sont pas tout à fait réalistes. Les définir à partir de l'ensemble des nombres réels utilisé sans précaution et assimiler les signaux à des points mobiles sans épaisseur a pour conséquence que l'infiniment petit (dont la physique n'accepte pas vraiment l'existence) se manifeste et produit d'étranges situations qui semblent impossibles dans notre univers. L'infiniment petit produit des points d'accumulation, des signaux en nombre infini et même les fractales deviennent réelles. Dans notre monde, les fractales n'existent que comme limite jamais atteinte, on en trouve et on en produit sous forme approximative. Ici, dans le monde des signaux, elles sont pleinement possibles, avec l'infinie finesse de leurs détails.

Même si le physicien se méfie, le mathématicien n'a pas peur de ces mondes idéaux ; au contraire, il les trouve intéressants. La question « Que peut-on calculer dans un monde de signaux ? » y devient délicate et... passionnante. Elle se décompose en trois questions que nous allons aborder successivement.

– Est-ce que tout calcul faisable dans un monde discret classique est faisable dans un monde de signaux à une dimension ?

– Les points d'accumulation rendent-ils réalisables des calculs impossibles dans un monde discret classique ? Si oui, lesquels ?

– Certains calculs que le monde discret classique ne permet pas de mener rapidement peuvent-ils l'être ici ? Qu'en est-il en particulier des problèmes NP-complets ?

Montrons d'abord comment les signaux peuvent effectuer des soustractions et du calcul modulaire.

Calculs classiques

La figure de gauche de l'encadré 2 représente un monde dans lequel se fait une soustraction. Pour réaliser la soustraction $a - b$, on place trois particules immobiles à distances 0, a et b de l'origine (on les nomme w_0, w_a, w_b). On lance alors du point d'abscisse – 1 une particule de vitesse 1 nommée « init ». Après cinq collisions de particules, une particule w_r immobile est créée ; elle donne le résultat de la soustraction, car elle est située exactement à une distance $a - b$ de l'origine. Durant le calcul, les particules w_a et w_b qui portaient les données initiales du calcul ont été annihilées, mais il serait facile de changer un peu les règles pour préserver ces données. Vérifier que la particule w_r est bien placée à une distance de l'origine exige un petit raisonnement géométrique... que nous vous laissons le plaisir de détailler.

On remarquera que l'algorithme de calcul géométrique proposé – il s'agit bien de cela – fonctionne avec n'importe quelles données, y compris avec des données irrationnelles comme π ou e, et calcule donc sans la moindre erreur $\pi - e$, si l'on suppose correctement placées au départ les particules associées à π et à e. Le monde des signaux sait faire des soustractions parfaites entre nombres réels quelconques, ce qu'évidemment aucun mécanisme physique de notre monde ne sait réaliser, du

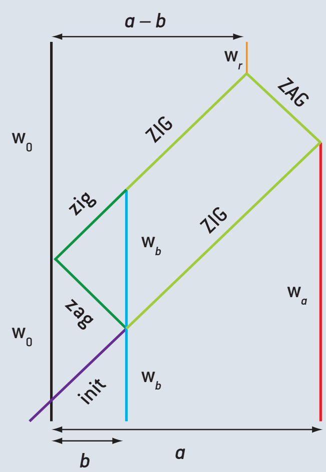
2. Effectuer une soustraction et un calcul modulaire

Pour réaliser des calculs avec des signaux, on place à l'instant 0 des signaux en des positions représentant les nombres sur lesquels on veut opérer. Ici *(figure de gauche)*, pour faire la soustraction *a* – *b*, on place un signal en position *a* et un autre en position *b*. Le système décrit dans la figure réalise en quelques collisions de signaux le calcul de la soustraction. Le résultat est inscrit dans l'univers unidimensionnel en considérant la distance qui sépare les deux signaux qui restent à l'issue des interactions. L'algorithme géométrique de soustraction fonctionne avec des nombres réels quelconques, même s'ils sont irrationnels comme π ou √5, et produit le résultat sans la moindre erreur.

La figure de droite montre l'algorithme géométrique de calcul du reste de la division de *a* par *b* (calcul de *a* modulo *b*).

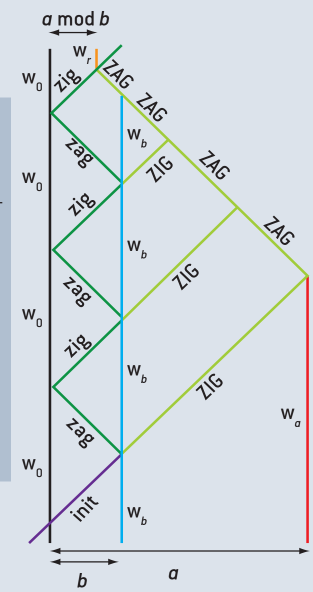
init, zig, ZIG	1
w_0, w_a, w_b, w_r	0
zag, ZAG	–1

init, w_b ⟶ zag, w_b, ZIG
w_0, zag ⟶ w_0, zig
zig, w_b ⟶ ZIG
ZIG, w_a ⟶ ZAG
w_b, ZAG ⟶ ZAG, w_b
ZIG, ZAG ⟶ w_r
zig, ZAG ⟶ w_r
zig, w_b, ZAG ⟶ w_r



init, zig, ZIG	1
w_0, w_a, w_b, w_r	0
zag, ZAG	–1

init, w_b ⟶ zag, w_b, ZIG
w_0, zag ⟶ w_0, zig
zig, w_b ⟶ zag, w_b, ZIG
ZIG, w_a ⟶ ZAG
w_b, ZAG ⟶ ZAG
zig, w_b, ZAG ⟶ ZAG
ZIG, ZAG ⟶ ZAG
zig, ZAG ⟶ w_r
w_0, ZAG ⟶ w_0



fait du mouvement brownien et plus généralement du fait que, pour un physicien, aucune constante ou valeur physique n'est vraiment assimilable à un nombre réel avec son infinité de décimales : les physiciens utilisent les nombres réels, mais ils n'y croient pas vraiment !

La figure de droite de l'encadré 2 montre le déroulement du calcul de « 11 mod 3 » (le reste de la division euclidienne de 11 par 3). En poursuivant l'étude de ces calculs avec signaux, on découvre progressivement que tout ce qu'un programme d'ordinateur (discret) calcule, une configuration convenable de signaux le fait aussi. Puisqu'il existe des méthodes permettant d'énumérer les nombres premiers, il existe une façon de définir des signaux calculant les nombres premiers, par exemple en créant des particules immobiles placées progressivement en position 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc. On dit du modèle de calcul par signaux qu'il est « computationnellement universel ».

Bien que tout se déroule dans un univers à une seule dimension, et que les seuls objets de ce monde soient des signaux, tout calcul réalisable par un ordinateur habituel (qui calcule avec des entiers et effectue des opérations entre quantités discrètes), peut-être mené. Pour effectuer les calculs, on n'a d'ailleurs jamais besoin d'exploiter les points d'accumulation. Il suffit de ne considérer que des signaux ayant des nombres entiers pour vitesse, placés à l'instant initial en des positions à coordonnées entières et interagissant à des instants qui seront des nombres entiers. Le monde des signaux réduit à la droite des nombres entiers et fonctionnant en temps discret possède le même pouvoir de calcul que nos ordinateurs (pourtant situés dans un espace de dimension 3).

Ces résultats sont bien sûr importants pour la théorie de la calculabilité et montrent une fois de plus que le pouvoir de calcul discret maximal est atteint par des dispositifs extrêmement simples. Non seulement les machines de Turing (des calculateurs discrets ne disposant que d'une mémoire finie et d'un ruban annexe de mémoire) ont ce pouvoir maximum de calcul, mais les signaux des mondes de J. Durand-Lose aussi.

Calculs infinitaires

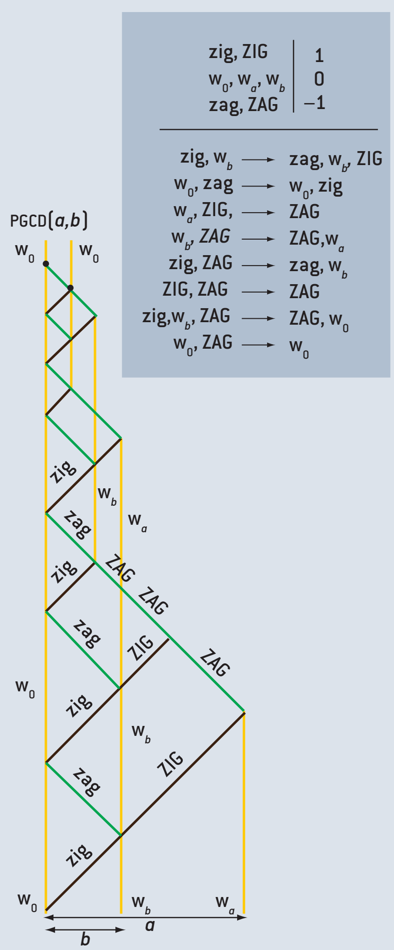
Cela étant établi, la question initiale devient : l'exploitation des points d'accumulation donne-t-elle plus de puissance de calcul aux mondes des signaux ? Ou encore : existe-t-il des calculs (que nous qualifierons d'infinitaires) que l'on réussit à effectuer avec des signaux et des points d'accumulation et qui sont impossibles à une machine de Turing ou à un ordinateur au sens habituel, c'est-à-dire fini et composé d'éléments discrets ?

Alan Turing a démontré en 1936 que le problème de l'arrêt est algorithmiquement indécidable : il n'existe pas d'algorithme (pour un ordinateur habituel discret) ayant pour

3. Calculer le PGCD

Le principe de l'algorithme géométrique de calcul du plus grand commun diviseur de deux nombres (PGCD), qui est une variante de l'algorithme d'Euclide, est le suivant. On part des deux nombres auxquels on s'intéresse, par exemple 8 et 3. On soustrait 3 à 8 autant de fois que c'est possible : 8 – 3 = 5, 5 – 3 = 2 ; puis on soustrait 2 à 3 autant de fois que c'est possible : 3 – 2 = 1 ; puis on soustrait 1 à 2 autant de fois que c'est possible : 2 – 1 = 1, 1 – 1 = 0. Le dernier résultat non nul obtenu est le PGCD. Dans ce cas, c'est le nombre 1, ce qui signifie que 8 et 3 sont premiers entre eux.

Si, au lieu de deux nombres dont le rapport est rationnel, on place au départ deux nombres dont le rapport est irrationnel, l'algorithme géométrique de calcul du PGCD crée un point d'accumulation. C'est la façon la plus économique d'en créer un.



données un programme P et indiquant sans jamais se tromper si P va s'arrêter ou tourner indéfiniment. Une multitude d'autres problèmes sont algorithmiquement indécidables. La solution du dixième problème de Hilbert, obtenue en 1970 par Yuri Matiassevitch, donne un exemple de problème algorithmiquement indécidable plus naturel que l'arrêt d'un programme. Savoir si une équation polynomiale à coefficients entiers (par exemple $x^2 + 5y^2 = 129$) possède des solutions en nombres entiers (pour notre exemple, la réponse est oui car $x = 2$, $y = 5$ convient) est un problème algorithmiquement indécidable.

La question énoncée à propos des calculs infinitaires se reformule en : l'arrêt des programmes classiques est-il décidable dans le monde des signaux ? Peut-on trouver des algorithmes pour signaux qui résolvent le problème des équations polynomiales ?

Rendre décidable ce qui ne l'est pas ?

La réponse à toutes ces questions est OUI ! L'utilisation des points d'accumulations, permise par le monde de signaux, rend décidable ce qui ne l'est pas dans les mondes discrets. Bien sûr, le sens de tels résultats doit être analysé avec prudence. Certes, si on pouvait créer avec une parfaite précision des systèmes de signaux (soit avec des particules, soit avec d'autres éléments physiques) et que ces signaux calculaient sans commettre la moindre erreur, on disposerait d'outils dont le pouvoir dépasserait tout ce que les ordinateurs classiques réalisent : certaines indécidabilités seraient levées.

Cependant, cela ne semble guère envisageable. D'une part, la précision de toute mesure est limitée dans notre espace physique. D'autre part, il est impossible de mettre en place des configurations initiales parfaites de signaux (sans la moindre approximation pour les positions et les vitesses), perfection nécessaire pour mener des calculs avec points d'accumulation. Les résultats obtenus concernant les calculs avec points d'accumulation n'ont donc qu'un intérêt théorique.

Notons toutefois que plusieurs études, menées en particulier par Istvan Németi et Gergely Székely, de l'Institut mathématique de l'Académie hongroise des sciences, proposent des modèles physiques de calcul où des sortes de points d'accumulation sont physiquement réalisés et utilisés. Ces modèles exploitent soit des trous noirs véritables, soit des courbes fermées de l'espace-temps relativiste. Le concept d'espace-temps de Malament-Hogarth a même été introduit pour désigner ces situations où un point de l'espace-temps possède un passé causal infini et peut donc recevoir une information sur le déroulement d'un calcul infini passé, comme c'est le cas pour les points d'accumulation des mondes de signaux. Si nous pouvions contrôler ou fabriquer des trous noirs ou des courbes fermées de l'espace-temps, nous lèverions les limitations imposées par les ordinateurs discrets.

Indiquons encore un autre type de résultats obtenu par les chercheurs explorant le monde des signaux. Tout nombre réel algébrique (par exemple $\sqrt{2}$) et de nombreuses constantes mathématiques usuelles (π, e, log 2, etc.) sont calculables dans le monde des signaux par des dispositifs où, initialement, toutes les particules ont des positions et des vitesses rationnelles (c'est-à-dire exprimables comme rapport de deux entiers). Dans le monde des signaux, grâce aux points d'accumulation, on peut connaître parfaitement des nombres qui ne sont pas rationnels, et une fois qu'on les connaît, on peut bien sûr calculer avec eux.

L'étude des nombres qu'on peut connaître avec les calculs de signaux a conduit en 2009 à leur caractérisation. Sont accessibles dans le monde des signaux tous les nombres réels pouvant s'écrire comme une différence de deux nombres récursivement énumérables (qui sont les nombres obtenus comme limite croissante d'une suite de nombres rationnels calculable par algorithme).

Le nombre π est récursivement énumérable, donc calculable dans un monde de signaux où toutes les données initiales sont des nombres rationnels (grâce, par exemple, à la série $\pi = 4/1 – 4/3 + 4/5 – 4/7 + 4/9 –...$). Certains nombres réels ne sont pas calculables par signaux. En effet, les nombres

égaux à une différence de deux nombres récursivement énumérables forment un ensemble infini dénombrable, alors que les nombres réels constituent un ensemble infini non dénombrable (donc plus « grand »). On réalise de magnifiques et surprenants calculs dans le monde des signaux, mais certaines limitations persistent.

Remarquons que le nombre Ω de Chaitin, dont la connaissance donnerait la solution de la majorité des grands problèmes mathématiques, telle la conjecture de Goldbach, est un nombre récursivement énumérable, donc calculable par signaux rationnels.

Calculs plus rapides

À côté du problème de ce qui est faisable en principe par le calcul (décidabilité, indécidabilité, etc.) un autre problème préoccupe les théoriciens de l'informatique : quels sont les calculs réalisables rapidement et quels sont ceux qui, du fait même de leur nature, demandent un temps impossible à envisager en pratique, et qu'on nomme « intrinsèquement difficiles ».

Les problèmes NP-complets sont la plus importante catégorie de problèmes de calcul considérés comme intrinsèquement difficiles. Par exemple, déterminer si un graphe est coloriable avec trois couleurs, sans que deux nœuds reliés soient de la même couleur, est un problème NP-complet.

On n'a pas démontré que les résoudre en temps polynomial était impossible, mais cela semble très probable et en attendant qu'on réussisse à le prouver (c'est la grande conjecture de l'informatique théorique, notée $P \neq NP$), on admet que les problèmes NP-complets sont intrinsèquement difficiles.

Est-ce qu'un calcul avec des signaux peut résoudre rapidement un problème NP-complet ? La réponse est oui. Denys Duchier, J. Durand-Lose et Maxime Senot ont réussi, sans utiliser de points d'accumulation (cela aurait été trop facile), à concevoir un algorithme géométrique pour signaux qui résout en temps constant et espace constant un problème NP-complet. Comme les problèmes NP-complets sont tous d'une difficulté équivalente, ce sont en fait tous les problèmes NP-complets que le modèle des signaux permet de résoudre efficacement.

L'encadré 3 représente le calcul du PGCD de deux nombres, effectué géométriquement avec seulement trois types de signaux. Cette figure est l'élément clef pour la solution du problème du nombre de signaux minimum nécessaire aux calculs.

Notons d'abord qu'avec 15 types de signaux différents n'utilisant que quatre vitesses différentes, on peut calculer tout ce qui est calculable par machine usuelle discrète. On n'a donc pas besoin en général d'un très grand nombre de vitesses différentes pour travailler. La question se pose cependant de savoir combien de signaux sont nécessaires pour mener des calculs. Ce problème a récemment été traité. Voici ce qu'on a trouvé et démontré.

– Avec des signaux n'utilisant qu'une vitesse, ou deux vitesses, il est impossible d'obtenir des points d'accumulation.

– Avec quatre vitesses différentes bien choisies, des points d'accumulation sont calculables, et on réussira même à calculer tout ce qui est calculable avec les machines habituelles discrètes.

– Avec trois vitesses différentes, aucun point d'accumulation ne peut être obtenu par calcul de signaux si les rapports entre vitesses ou entre distances initiales de signaux sont tous des nombres rationnels.

– En revanche, avec trois vitesses différentes, il existe des situations où un point d'accumulation est construit en exploitant l'irrationalité du rapport de deux des vitesses, et des situations où un point d'accumulation est construit en exploitant l'irrationalité de deux des distances initiales entre signaux de départ.

– En 2013, J. Durand-Lose a montré que tout calcul classique était faisable avec une machine à 25 types de signaux n'utilisant que trois vitesses différentes.

On le voit, cette compréhension fine du monde idéalisé des signaux, outre l'intérêt mathématique pour l'informatique théorique, nous prépare pour le futur... quand nous saurons créer des points d'accumulation dans notre espace-temps, si les physiciens nous confirment que c'est possible. Merveilles du rêve mathématique ! ■

L'AUTEUR

J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

J. Durand-Lose, **Irrationality is needed to compute with signal machines with only three speeds,** dans *The Nature of Computation*, Springer (LNCS 7921), pp. 108-119, 2013.

H. Andréka *et al.*, **Closed timelike curves in relativistic computation,** *Parallel Processing Letters*, vol. 22(3), 1240010, 2012.

D. Duchier *et al.*, **Computing in the fractal cloud : Modular generic solvers for SAT and Q-SAT variants,** dans *Theory and Applications of Models of Computation*, Springer (LNCS 7287), pp. 435-447, 2012.

B. S. Cooper *et al.* (ed.), **How the World Computes,** Turing Centenary Conf. and 8th Conf. on Computability in Europe, CiE 2012, Cambridge, UK, June 18-23, Proceedings, 2012.

J. Durand-Lose, **Abstract geometrical computation 1 : Embedding black hole computations with rational numbers,** *Fund. Inf.*, vol. 74(4), pp. 491-510, 2006.

I. Nemeti et G. David, **Relativistic computers and the Turing barrier,** *Appl. Math. Comput.*, vol. 178(1), pp. 118-142, 2006.