

RENDEZ-VOUS

LOGIQUE & CALCUL

Des stratégies miraculeuses

Un bon raisonnement, aussi efficace qu'inattendu, peut vous sauver la vie ou vous faire sortir de prison... si vous êtes soumis à une épreuve analogue à celle du problème des 50 prisonniers.

Jean-Paul DELAHAYE

Certains énigmes sont si étonnantes que leurs solutions apparaissent miraculeuses. Elles illustrent l'intérêt de l'approche mathématique et logique des problèmes, qui surmonte parfois une apparente impossibilité absolue. Le problème que nous allons présenter avec quelques variantes est de cette catégorie : avant d'en avoir la solution, vous serez probablement persuadé que ce qui est demandé est infaisable.

Le problème des 50 prisonniers

Les gardiens d'une prison promettent de libérer leurs 50 prisonniers tous ensemble s'ils réussissent l'épreuve suivante. Les gardiens écrivent les 50 noms des prisonniers sur 50 cartons. Ils placent les cartons au hasard, à raison d'un carton par boîte, dans 50 boîtes fermées et alignées sur une grande table. Les prisonniers sont conduits les uns après les autres devant les boîtes. Sans savoir ce qu'ont fait les prisonniers précédents, chaque prisonnier doit ouvrir 25 des 50 boîtes et y trouver le carton avec son nom. Les prisonniers ne peuvent déplacer ni les boîtes ni les cartons, et doivent refermer les boîtes ouvertes avant de sortir. L'épreuve n'est réussie que si chaque prisonnier trouve son nom. Avant que l'épreuve commence, les prisonniers peuvent se concerter pour convenir d'une méthode, mais une fois l'épreuve commencée, ils n'ont plus aucun échange.

Les prisonniers pourraient procéder au hasard. Par exemple, ils pourraient utiliser une loterie à 50 numéros : chaque prisonnier lancerait la loterie autant de fois qu'il le faut, et ouvrirait la boîte indiquée par la loterie (sans tenir compte des numéros tombés plusieurs fois), cela jusqu'à avoir ouvert 25 boîtes. Chacun aurait une chance sur deux de réussir, et puisque les tirages seraient indépendants, la probabilité qu'ils réussissent tous serait exactement $1/2^{50} = 8,881 \times 10^{-16}$, ce qui est vraiment très peu !

Ils peuvent faire beaucoup mieux et avoir une probabilité de réussite collective supérieure à 30 %. Comment ?

Le problème, sous diverses formes, est connu depuis 2003. Il a été proposé par les chercheurs danois en informatique Peter Bro Miltersen et Anna Gál, qui étaient persuadés que lorsque le nombre de boîtes augmente (il y a $2n$ prisonniers et $2n$ boîtes, chaque prisonnier pouvant ouvrir n boîtes), la probabilité de gagner tend vers 0. Leur collègue Sven Skyum les convainquit de leur erreur et leur montra que pour tout n , les prisonniers disposent d'une méthode qui leur garantit la liberté dans plus de 30 % des cas.

Prenez la peine de chercher cette méthode. Quelle est donc cette stratégie de jeu qui semble réaliser un miracle ?

Notez bien qu'il n'y a aucun doute sur l'affirmation qu'un prisonnier seul a exactement une chance sur deux de réussir à trouver son nom. En effet, les noms sont mis au hasard dans les boîtes et il en ouvre la moitié sans avoir la moindre information sur l'ordre des cartons dans les boîtes. Les

prisonniers ne pouvant pas communiquer une fois l'épreuve commencée, il semble qu'ils ne peuvent que jouer au hasard indépendamment et, en conséquence, que rien ne leur permet d'avoir collectivement mieux que ce que donne la stratégie *Au hasard* qui aboutit à une chance sur 2^{50} de réussir. Cependant, ce raisonnement est faux : s'ils sont malins, les prisonniers trouveront tous leur nom dans plus de 30 % des cas.

Perdre ou gagner tous en même temps !

L'idée est que les prisonniers doivent trouver un moyen de se coordonner. Il faut qu'ils s'arrangent pour perdre souvent en même temps, s'ils veulent pouvoir souvent gagner tous en même temps. Les prisonniers ne peuvent pas communiquer, mais ils peuvent adopter des comportements corrélés et, par conséquent (et c'est là que se trouve l'erreur du raisonnement qui semblait prouver qu'on ne peut pas faire mieux que la stratégie *Au hasard*), ils peuvent faire des choix liés.

Pour expliquer la solution, nous supposons que les noms des prisonniers sont les entiers de 1 à 50, ce qui bien sûr ne change rien au problème.

Les prisonniers opèrent de la façon suivante. Quand un prisonnier se trouve devant les boîtes, il ouvre celle correspondant à son numéro : le prisonnier numéro 1 ouvre la boîte placée au début de la ligne de boîtes, le prisonnier numéro 2 ouvre la deuxième boîte, etc. Si le prisonnier trouve son numéro dans la boîte qu'il ouvre, il s'arrête. S'il ne

Problème des 50 prisonniers : la procédure et la solution Suivre

Cinquante prisonniers numérotés de 1 à 50 passent les uns après les autres devant une grande table où sont alignées 50 boîtes. Ils ne peuvent pas communiquer et ignorent ce qu'ont fait les prisonniers passés avant eux. Les gardiens de la prison ont déposé au hasard des cartons numérotés de 1 à 50 dans les 50 boîtes, en mettant exactement un carton par boîte. Chaque prisonnier ouvre 25 boîtes de son choix et les referme sans toucher aux cartons qui s'y trouvent. L'ensemble des prisonniers gagne et ils sont libérés si chacun d'eux a ouvert la boîte contenant son numéro.

En jouant au hasard, les prisonniers réussiraient dans 1 cas sur 2^{50} (car chacun aura dans ce cas une chance sur deux de trouver son numéro). Ils peuvent faire beaucoup mieux et gagner dans plus de 30 % des cas. Comment ?

En appliquant la stratégie *Suivre* (illustration ci-dessous), les $2n$ prisonniers gagnent si la permutation définie par la distribution des cartons dans les boîtes ne contient pas un cycle de taille supérieure à n . Le raisonnement mathématique montre que cela se produit pour une proportion de permutations égale à $1 - 1/(n+1) - 1/(n+2) - \dots - 1/(2n)$.

Avec 4 prisonniers, on a $4! = 24$ permutations possibles. Les répartitions de cycles sont :

A. Quatre cycles de taille 1

1 permutation : $[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 4]$.

B. Un cycle de taille 2 et deux de taille 1

6 permutations :

$[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 4]$
 $[1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 4]$
 $[1 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3]$
 $[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 4]$
 $[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2]$
 $[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3]$

C. Deux cycles de taille 2

3 permutations :

$[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3]$
 $[1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1]$
 $[1 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1]$

D. Un cycle de taille 3 et un cycle de taille 1

8 permutations :

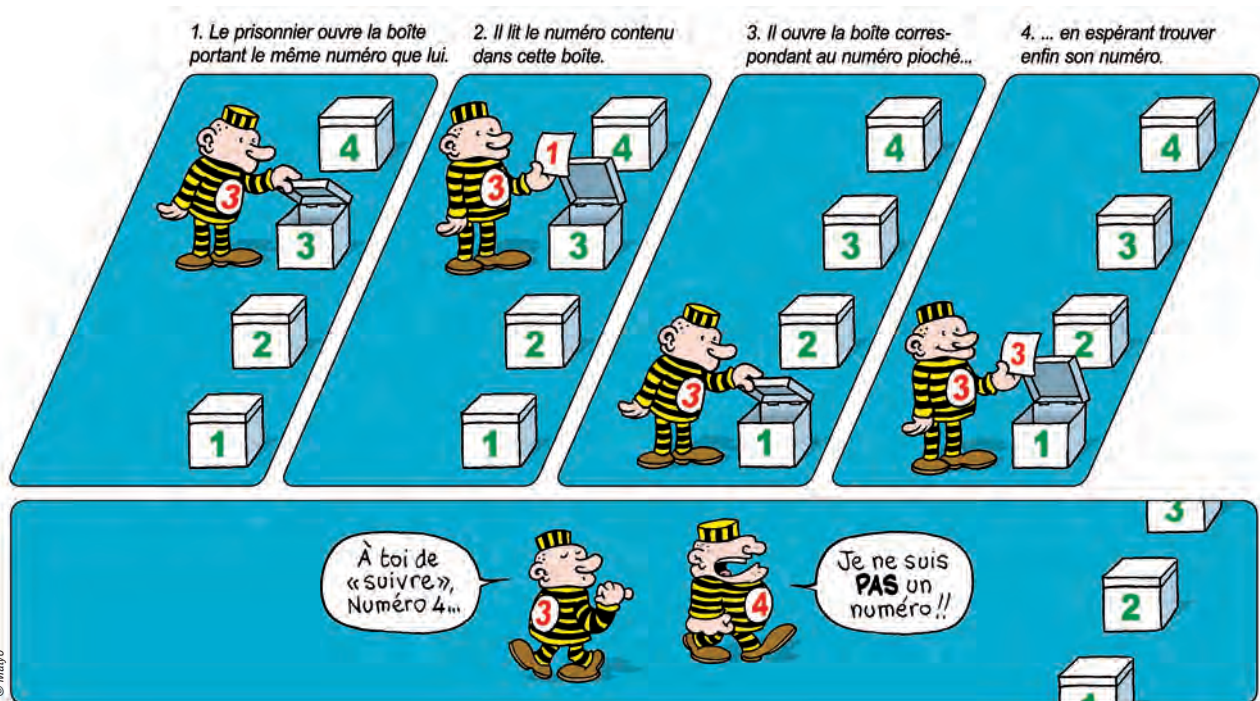
$[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2]$
 $[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2]$
 $[1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1]$
 $[1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3]$
 $[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 1]$
 $[1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 2]$
 $[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 4]$
 $[1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 4]$

E. Un cycle de taille 4

6 permutations :

$[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1]$
 $[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3]$
 $[1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 1]$
 $[1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2]$
 $[1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 2]$
 $[1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 3]$

On a bien 24 permutations. Le nombre de permutations permettant de gagner est $10 = 1 + 6 + 3$ (cas A, B et C). La probabilité de gagner est bien de $10/24 = 1 - 1/3 - 1/4$.



Une inégalité démontrée par un dessin

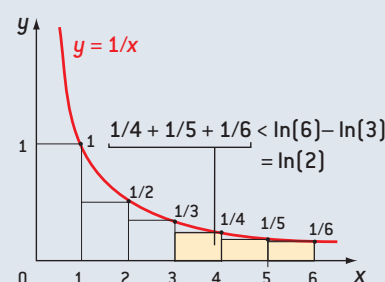
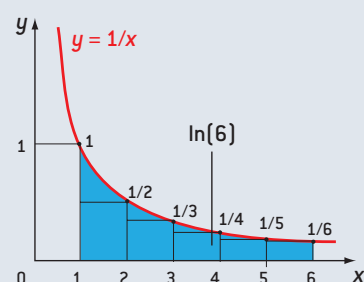
Pour prouver que, en adoptant la stratégie *Suivre*, les prisonniers ont une probabilité de gagner supérieure à $1 - \ln(2) = 0,306852\dots$, on utilise le fait que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$1 - [1/(n+1) + 1/(n+2) + \dots + 1/(2n)] > 1 - \ln(2).$$

Cette inégalité est équivalente à : $1/(n+1) + 1/(n+2) + \dots + 1/(2n) < \ln(2)$.
Donnons une preuve graphique de ce

résultat pour $n=3$, clairement généralisable à tout entier $n \geq 2$. Le logarithme népérien de t , noté $\ln(t)$, est défini par

tout t positif comme l'aire comprise entre l'axe des x et l'hyperbole d'équation $y=1/x$, entre l'abscisse 1 et l'abscisse t . Cela permet de visualiser $\ln(6)$ et $\ln(3)$, puis, par soustraction, $\ln(6) - \ln(3) = \ln(2)$. Les petits rectangles en jaune ont une aire qui vaut $1/4 + 1/5 + 1/6$. Puisque l'aire en jaune est contenue dans l'aire en bleu, on a : $1/4 + 1/5 + 1/6 < \ln(6) - \ln(3) = \ln(2)$.



$$\ln(2) = \ln(2n) - \ln(n) > 1/(n+1) + 1/(n+2) + \dots + 1/(2n)$$

le trouve pas, il ouvre la boîte correspondant au numéro trouvé dans la boîte qu'il vient d'ouvrir. S'il trouve son numéro dans cette seconde boîte, il s'arrête. Sinon, il continue de la même façon : il va ouvrir la boîte correspondant au numéro qu'il vient de trouver dans la dernière boîte ouverte, et continue jusqu'à avoir ouvert 25 boîtes. Cette stratégie est la stratégie *Suivre*.

Pourquoi la stratégie *Suivre* fonctionne-t-elle ? L'explication se résume ainsi : en adoptant la stratégie *Suivre*, un prisonnier trouvera son numéro, sauf si le cycle auquel appartient son numéro dans la décomposition en cycles de la permutation des boîtes définie par les cartons qu'elles contiennent est de longueur (on dit aussi : ordre) supérieure à 25. Et les prisonniers qui adoptent tous la stratégie *Suivre* gagneront si la décomposition en cycles de la permutation ne comporte pas de cycle de longueur supérieure à 25, ce qui se produit dans plus de 30 % des cas.

Avant de justifier cette probabilité, examinons les permutations, cycles et décomposition en cycles. Une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, p\}$ (p étant un entier positif) est une application bijective f (ou dite

aussi biunivoque ou « un à un ») de l'ensemble vers lui-même. Cette application vérifie deux propriétés : si $a \neq b$, alors $f(a) \neq f(b)$ (propriété A) ; pour tout c entre 1 et p , il existe un unique a tel que $f(a) = c$ (propriété B).

Les cartons portant les numéros mis dans les boîtes définissent une telle permutation, car il y en a exactement un par boîte. Si l'on a par exemple 6 prisonniers ($n=3$) et que les cartons sont mis dans l'ordre 2-4-5-1-3-6, l'application bijective f est celle qui à 1 associe 2, à 2 associe 4, à 3 associe 5, à 4 associe 1, à 5 associe 3, et à 6 associe 6 : $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 5, f(4) = 1, f(5) = 3, f(6) = 6$.

Pas de cycles trop longs dans la permutation

Observons le prisonnier 1 qui applique la stratégie *Suivre* : il ouvre la boîte 1 et y trouve le carton 2 ; il ouvre donc la boîte 2 où il trouve le carton 4 ; il ouvre donc la boîte 4 où il trouve le carton 1. Il s'arrête, il a réussi. Le prisonnier 2, lui, tombe sur 4, puis 1, puis 2. Il réussit aussi. On vérifie que tous les prisonniers réussissent, car la stratégie *Suivre* les envoie dans le cycle $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$

pour les prisonniers 1, 2 et 4, dans le cycle $3 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ pour les prisonniers 3 et 5, et dans le cycle $6 \rightarrow 6$ pour le prisonnier 6.

La permutation considérée ici se décompose en trois cycles de longueurs respectives 3, 2 et 1. Ce type de décompositions en cycles est général : toute permutation d'un ensemble fini dans lui-même se décompose en un nombre fini de cycles.

Pour le démontrer, c'est assez simple. En partant de x et en suivant les entiers successifs $f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$, on finit par retomber sur un entier y déjà obtenu, car il n'y a qu'un nombre fini d'entiers considérés par la permutation. Considérons le premier entier y déjà obtenu sur lequel on retombe. C'est nécessairement x , car si c'était un autre entier, celui-ci serait obtenu de deux façons différentes (par l'entier qui a donné y la première fois, et par celui qui y amène la deuxième fois), ce qui est impossible puisque f étant bijective, tout élément n'a qu'un seul antécédent (propriété B). Tout entier x appartient donc à un cycle. La permutation se décompose ainsi en plusieurs cycles, qui sont bien sûr disjoints, et qui sont tels que la somme de leur taille (le nombre de leurs éléments) est p .

Dans notre histoire des 50 prisonniers, si tous utilisent la stratégie *Suivre*, alors ils gagnent quand il n'y a aucun cycle de longueur supérieure à 25. S'il existe un cycle de longueur 50, ils perdent tous. Dans les autres cas, par exemple si on a un cycle de longueur 30 et d'autres cycles (nécessairement de longueur inférieure à $20 = 50 - 30$), il y aura autant de prisonniers perdants que d'éléments du plus grand cycle, et les prisonniers perdront collectivement (voir l'encadré page 79, qui détaille le cas de 4 prisonniers). Le problème se ramène donc à calculer combien de permutations de l'ensemble à 50 éléments ont un cycle de longueur supérieure à 25.

La probabilité de gagner des 50 prisonniers

Nous allons montrer que la probabilité qu'une permutation des entiers $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ ne contienne pas de cycle de longueur supérieure à n est supérieure à $1 - \ln(2)$ (où $\ln$ désigne le logarithme népérien), soit 0,306852... Cela montrera que la probabilité que les prisonniers gagnent est supérieure à 30 %.

Soit k un entier tel que $n < k \leq 2n$. Évaluons le nombre de permutations ayant un cycle d'ordre k parmi les $(2n)!$ permutations possibles de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$. Il y a $C(2n, k) = \frac{(2n)!}{(2n-k)!k!}$ façons de choisir les entiers du cycle. Le nombre $C(2n, k)$ est le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi $2n$. Il y a $(k-1)!$ façons d'ordonner les k entiers choisis en un cycle, et il y a $(2n-k)!$ façons de classer les autres entiers pour déterminer la permutation. Le nombre total de permutations de $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ ayant un cycle d'ordre k supérieur à n est donc : $\left[\frac{(2n)!}{(2n-k)!k!} \right] \times (k-1)! \times (2n-k)! = \frac{(2n)!}{k}$. Il s'ensuit que la probabilité de tomber sur une permutation ayant un cycle d'ordre k est $1/k$.

Par conséquent, la probabilité qu'il n'y ait aucun cycle d'ordre k supérieur à n est $1 - \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right] = 1 - H(2n) + H(n)$, où $H(i) = 1 + 1/2 + \dots + 1/i$. On sait que $H(i)$ vaut à peu de chose près $\ln(i)$. La probabilité recherchée vaut donc approximativement $1 - \ln(2n) + \ln(n) = 1 - \ln(2) = 0,306852...$

Démonstration d'optimalité

La magnifique démonstration qui suit est due à Eugene Curtin et Max Warshauer. Elle prouve qu'il est impossible de faire mieux que la stratégie *Suivre*. Nous considérons une variante du jeu où les prisonniers procèdent comme pour le jeu initial, mais s'arrêtent d'ouvrir des boîtes quand ils ont trouvé leur numéro (cela ne les désavantage pas), et, surtout, ne referment pas les boîtes ouvertes.

Le prisonnier p bénéficie donc des informations données par les boîtes ouvertes par les prisonniers $1, 2, \dots, p-1$. Cette variante rend le jeu plus facile, et donc la meilleure stratégie de jeu pour cette variante conduira à une probabilité de gagner supérieure ou égale à celle de la meilleure façon de jouer pour le jeu initial.

Jouer à cette variante équivaut à ne considérer qu'un prisonnier qui ouvre les $2n$ boîtes dans un certain ordre et qui s'arrête une première fois au bout de a_1 boîtes quand il a trouvé la boîte contenant le carton 1, puis une seconde fois après avoir ouvert a_2 boîtes quand il a trouvé le carton 2, etc. Le prisonnier a gagné si aucun des nombres a_i n'est supérieur à n .

Comme les contenus des boîtes ont été choisis au hasard par les gardiens, l'ordre d'ouverture qu'utilise le prisonnier de la variante est sans importance : toutes les façons d'ouvrir les boîtes donnent la même probabilité générale de gagner. On peut donc supposer que le prisonnier de la variante ouvre simplement les boîtes dans l'ordre où elles se présentent sur la table. Calculer sa probabilité de gagner sous cette hypothèse donnera la probabilité la meilleure de gagner pour la variante.

Prenons le cas $n=3$, $2n=6$. Les boîtes contiennent les cartons 6-1-2-4-3-5, dans cet ordre. Le prisonnier ouvre d'abord les boîtes contenant le 6 et le 1 (il cherche le 1). Donc $a_1=2$. Puis la boîte contenant le 2 (il cherche le 2) : $a_2=1$. Puis les boîtes contenant le 4 et le 3 (il cherche le 3) : $a_3=2$. Pour le 4, il n'ouvre aucune nouvelle boîte, puisque le carton 4 est déjà trouvé : $a_4=0$. Il ouvre ensuite les boîtes contenant le 5 (il cherche le 5) : $a_5=1$. Pour le 6, il n'ouvre aucune boîte nouvelle : $a_6=0$. Le prisonnier gagne, car à aucun moment il n'a eu plus de

3 boîtes à ouvrir pour trouver le carton suivant (chaque a_i est inférieur à 3). Nous noterons

$[6,1][2][4,3][5]$ cette séquence d'ouverture des boîtes. Une séquence de jeu perdante serait par exemple $[1][3,4,5,2][6]$: la deuxième recherche oblige le joueur à ouvrir 4 boîtes.

La notation adoptée pour représenter les séquences possibles pourrait être utilisée pour représenter la décomposition en cycles d'une permutation. La séquence $[6,1][2][4,3][5]$ représenterait ainsi la permutation qui envoie 1 sur 6 et 6 sur 1, envoie 2 sur 2, envoie 4 sur 3 et 3 sur 4, et envoie 5 sur 5 (cette notation est la « forme canonique » de la permutation, voir <https://fr.wikipedia.org/wiki/Permutation>).

À chaque séquence de jeu de la variante correspond exactement une permutation en forme canonique et réciproquement. Il y a donc exactement autant de séquences de jeux gagnantes que de permutations dépourvues de cycles d'ordre strictement supérieur à n , c'est-à-dire $1 - H(2n) + H(n)$, où $H(i) = 1 + 1/2 + \dots + 1/i$ (voir le calcul effectué dans le texte ci contre). La meilleure façon de jouer à la variante du jeu, plus facile que le jeu initial, gagne donc avec une probabilité égale à celle de gagner pour les prisonniers du jeu initial appliquant la stratégie *Suivre*. La meilleure façon de jouer au jeu initial ne peut donc pas dépasser ce nombre. La stratégie *Suivre* obtient ainsi une probabilité de succès impossible à améliorer.



Les deux énigmes de Roland Yéléhada

Voici deux petits problèmes ressemblant au problème des 50 prisonniers. Ils présentent la propriété suivante, qui en fait l'intérêt : la meilleure stratégie pour les prisonniers n'est ni la stratégie *Au hasard* ni la stratégie *Suivre*. La question posée est à chaque fois : quelle est la meilleure stratégie pour les prisonniers ?

Problème 1. Il y a six prisonniers, et chacun peut ouvrir 2 boîtes. Ils sont libérés si trois au moins trouvent leur numéro.

Problème 2. Il y a six prisonniers, et chacun peut ouvrir 2 boîtes. Ils sont libérés si deux au moins trouvent leur numéro.

Commençons par le problème 2, qui est facile. Si les prisonniers utilisent la stratégie *Au hasard* (chaque prisonnier ouvre au hasard 2 boîtes différentes), ils perdront si aucun des 6 prisonniers ne trouve son numéro, $(4/6)^6$, ou si 5 ne le trouvent pas $6 \times (2/6) \times (4/6)^5$, ce qui fait au total une probabilité de perdre égale à 35,11 %. S'ils utilisent la stratégie *Suivre*, l'examen des 720 permutations (c'est fastidieux, mais on y arrive) montre qu'il y a 304 mauvais cas sur

les 720. Les prisonniers ont donc 42 % de chance d'échouer. C'est pire que jouer au hasard, ce qui montre que *Suivre* n'est pas toujours intéressante. Pourtant, ils peuvent gagner dans 100 % des cas : chacun ouvre la boîte 1 et la boîte 2. Nécessairement, le prisonnier 1 trouve son numéro, et de même pour le prisonnier 2. C'était un piège !

Le problème 1 est plus difficile. La stratégie *Au hasard* (chaque prisonnier ouvre au hasard 2 boîtes différentes) fait perdre si 4, 5 ou 6 prisonniers ne trouvent pas leur numéro. Le calcul donne une probabilité de $(2/3)^6 + 6(1/3)(2/3)^5 + 15(1/3)^2(2/3)^4 = 68,03$ % d'échouer. J'ai vérifié ce résultat en faisant un programme. La stratégie *Suivre* donne un bon nombre de cas défavorables.

Avec un peu de patience ou un programme, on trouve qu'il y en a 484 sur les 720 et donc que la probabilité d'échouer est $484/720 = 67,22$ %. Notons que la stratégie *Chacun ouvre les boîtes 1 et 2* donne 100 % de chance d'échouer. La ruse précédente ne marche plus !

Une étude de nombreuses stratégies (à la main ou en utilisant des programmes) conduit à découvrir plusieurs stratégies qui limitent la probabilité d'échec à 66,66 % (c'est-à-dire $2/3$). Voici l'une d'elles, meilleure donc que les stratégies *Au hasard* et *Suivre* : « Le prisonnier 1 ouvre les boîtes 1 et 2, le prisonnier 2 ouvre 2 et 4, le prisonnier 3 ouvre 3 et 6, le prisonnier 4 ouvre 1 et 2, le prisonnier 5 ouvre 2 et 4, le prisonnier 6 ouvre 3 et 6. »

Quel est le secret de cette coordination étrange qui fait mieux que le hasard et *Suivre* ? Peut-on faire encore mieux ? On l'ignore encore aujourd'hui. Un lecteur pourra-t-il répondre ?

L'examen détaillé des inégalités montre que $1 - \ln(2)$ est une valeur par défaut de la probabilité cherchée, et donc que celle-ci est supérieure à 0,306852... (voir l'encadré page 80).

Ainsi, les prisonniers ont une probabilité de réussir supérieure à 30,6852 %. Dans notre problème, on peut calculer directement cette probabilité (donc sans avoir à s'occuper d'approximation). Elle vaut :

$$1 - \left(\frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{50} \right) = 0,31675283...$$

L'idée qui explique le miracle est, répétions-le, que lorsque la permutation choisie a un cycle plus long que n , les prisonniers dont le numéro appartient à ce cycle se trompent tous. Le fait pour les prisonniers de perdre ensemble en grand nombre est l'exact inverse d'un choix au hasard qui rend indépendants les échecs des prisonniers. En concentrant les cas où ils perdent, ils concentrent les cas où ils gagnent, car chacun gagne exactement une fois sur deux (il ne peut individuellement ni faire mieux ni faire moins bien). Au mieux, cette concentration des cas gagnants pourrait donner

une probabilité de réussite de 50 % (s'il n'y avait que des cas où tous sont perdants ou tous sont gagnants). Le 50 % est impossible, car on a démontré que la stratégie *Suivre* est la meilleure façon de jouer (voir l'encadré page 81) : il faut se contenter de 31,67 %.

Gagner une fois sur deux ?

Indiquons quelques résultats complémentaires sur ce jeu. On pourrait considérer que 30 % est un peu faible. Il serait plus sympathique de permettre aux prisonniers de gagner dans un cas sur deux. Pour cela, il faut que chacun puisse ouvrir un peu plus de 50 % des boîtes. Quelle proportion ? Un petit calcul montre que la proportion donnant 50 % est $1/\sqrt{e} = 0,606530...$ quand n tend vers l'infini. Dans le cas de 50 prisonniers, si l'on autorise chacun à ouvrir 30 boîtes, ils gagneront (en utilisant la stratégie *Suivre*) dans 49,57 % des cas. Si chacun peut ouvrir 31 boîtes, ils gagneront dans 52,80 % des cas.

L'intérêt de cette énigme tient aussi à ce qu'elle a permis d'en imaginer quelques autres. Bien entendu, la connaissance de la solution de la première énigme sera un avantage pour résoudre les autres. En voici une dont l'énoncé se présente assez différemment. Elle m'a été proposée par Elie Cattan.

On n'a que deux prisonniers. Les 50 boîtes contiennent des numéros de 1 à 50. Comme dans le problème précédent, les deux prisonniers peuvent convenir d'une stratégie avant l'épreuve, mais ne peuvent communiquer une fois celle-ci commencée. Le premier prisonnier entre dans la pièce, regarde le contenu de toutes les boîtes et, s'il le désire, inverse le contenu de deux boîtes, et seulement deux. Il sort. Le second prisonnier entre alors dans la pièce, les gardiens de la prison lui assignent un numéro tiré au hasard entre 1 et 50, et il doit trouver ce numéro en ouvrant au maximum 25 boîtes. S'il trouve le numéro qui lui a été donné, les deux prisonniers sont libérés, sinon ils restent en prison.

Encore une fois, le problème défie l'entendement, car on a du mal à comprendre la

stratégie que pourrait adopter le premier prisonnier sans avoir connaissance du numéro qui va être attribué au second. Pourtant, s'ils sont malins, les deux prisonniers sont sûrs (à 100 %) d'être sauvés. Voici comment faire.

Le premier prisonnier, qui a une connaissance complète de la permutation f définie par la disposition des cartons dans les boîtes, examine ses cycles. Si tous ont 25 éléments ou moins, il ne fait rien. Si l'un des cycles est d'ordre 26 ou plus (il ne peut en exister qu'un seul), il va le casser.

Pour ce faire, il prend un élément du cycle, par exemple 1, et suit les cartons comme quand on applique la stratégie *Suivre*. Il va donc à la boîte 1, puis à la boîte $f(1)$, puis à la boîte $f(f(1))$, etc. Il repère la 25^e boîte du cycle, puis continue jusqu'à trouver le carton 1 dans la boîte k ($k > 25$). Il échange les cartons de la 25^e boîte ouverte et de la boîte ouverte la k -ième fois. En faisant cela, le cycle auquel appartient 1 a maintenant pour longueur 25 (car la 25^e boîte ramène en 1). La permutation obtenue après l'échange des cartons n'a donc aucun cycle de taille supérieure à 25. Le prisonnier 2, en appliquant la stratégie *Suivre* à partir de la boîte k , sera ainsi certain de trouver le carton k qu'on lui aura demandé, et ce quel que soit k .

D'une énigme à l'autre

La variante suivante se présente très simplement et n'implique que très peu de personnages. Inspirée du problème du Monty Hall, elle a été proposée par Adam Landsberg, du Scripps College, aux États-Unis, et Eric Grundwald, de Londres.

Un jeu télévisé est organisé. Trois rideaux sont disposés sur la scène. L'un cache une voiture, un autre une clé, et le troisième rideau un appareil GPS. On ne sait pas dans quel ordre sont disposés les trois objets, et cet ordre a été choisi au hasard. Trois membres d'une même famille sont invités à jouer. Le premier pourra regarder derrière deux des rideaux et il doit trouver la voiture. Le second pourra regarder derrière deux des rideaux et devra trouver la clé de la voiture. Le troisième, toujours en observant derrière deux rideaux, devra trouver le GPS. Les joueurs jouent les uns après les autres, sans savoir

ce qu'ont fait et vu ceux déjà passés. Ils gagnent et emportent la voiture, la clé et le GPS si chacun a trouvé ce qu'il devait trouver. En jouant au hasard, ils gagnent dans $(2/3)^3 = 29,629\%$ des cas. Pourtant, en s'y prenant bien, ils pourraient gagner dans $2/3$ des cas, soit avec une probabilité de 66,66 %. Comment ?

Ils appliquent la stratégie *Suivre* en convenant d'un ordre entre les joueurs (celui qui doit trouver la voiture est le 1, celui qui doit trouver la clé est le 2, et celui qui doit trouver le GPS est le 3) et d'un ordre des éléments à trouver (la voiture est le 1, la clé le 2, le GPS le 3). La disposition des cadeaux derrière les rideaux définit une permutation f de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même. La probabilité de perdre correspond alors au rapport entre le nombre de permutations f ayant un cycle de taille 3 et le nombre total de permutations de 3 éléments, c'est-à-dire $3! = 6$.

On peut appliquer le raisonnement général considéré plus haut (il conclut que la probabilité de perdre est $1 - 1/3$), mais un raisonnement direct est possible. En effet, les 6 permutations de 3 éléments sont : $(1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3)$, $(1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2)$, $(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3)$, $(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1)$, $(1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2)$, $(1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1)$. Deux d'entre elles ont un cycle de taille 3 : $(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1)$ et $(1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2)$. Les autres n'ont que des cycles d'ordre 1 ou 2. Les joueurs gagneront donc dans $2/3$ des cas.

Deux variantes à 6 prisonniers ont été proposées récemment par Roland Yéléhada, (voir l'encadré page ci-contre). Les deux problèmes ont la propriété suivante qui vous forcera à réfléchir : ni la stratégie *Au hasard* ni la stratégie *Suivre* ne sont les meilleures. Attention, l'un des deux problèmes est facile et l'autre beaucoup moins.

Dans le monde physique, les miracles sont légion (une télévision, une voiture ou un smartphone seraient des objets magiques pour un homme du XV^e siècle). Dans le monde mathématique, certains miracles se produisent et ce qu'un raisonnement approximatif semblait éliminer définitivement (on ne pourrait faire mieux que la stratégie *Au hasard*) se révèle erroné pour le chercheur astucieux. De tels moments font le bonheur des mathématiciens.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

Wikipedia, 100 prisoners problem, https://en.wikipedia.org/wiki/100_prisoners_problem

E. Grundwald, Re: The locker puzzle, *Mathematical Intelligencer*, vol. 32(2), p. 1, 2010.

A. S. Landsberg, The return of Monty Hall, *Mathematical Intelligencer*, vol. 31(2), p. 1, 2009.

A. Gál et P. Bro Miltersen, The cell probe complexity of succinct data structures, *Theoretical Computer Science*, vol. 379(3), pp. 405-417, 2007.

E. Curtin et M. Warshauer, The locker puzzle, *Mathematical Intelligencer*, vol. 28, pp. 28-31, 2006.



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr