R
ENDEZ-VOUS

LES CARRÉS MAGIQUES D'AIRES

On s'intéresse aux carrés magiques depuis plus de deux millénaires. Des amateurs d'énigmes leur ont récemment associé des exigences géométriques, ce qui enrichit spectaculairement le domaine.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (Cristal)

Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

En juin 2013, cette rubrique était consacrée aux carrés magiques géométriques, les « carrés géomagiques », une merveilleuse invention de Lee Sallows. Cet ingénieur britannique en a développé la théorie pour réaliser une impressionnante collection de solutions réunies dans son livre *Geometric Magic Squares. A Challenging New Twist Using Colored Shapes Instead of Numbers* (Dover, 2013).

Lee Sallows a introduit la géométrie dans l'arithmétique des carrés magiques de la façon suivante (*voir l'encadré 1*) : les formes géométriques de chaque case d'un tableau carré sont différentes, mais de même aire ; les formes des cases de toutes les lignes, toutes les colonnes et des deux diagonales constituent les pièces d'un même puzzle, par exemple un même rectangle.

En décembre 2016, William Walkington, un passionné britannique de divertissements mathématiques, a découvert une géométrisation plus directe des carrés magiques. Il a nommé son invention *area magic squares*, que nous traduirons par *carrés magiques d'aires*. Ces objets géométrico-arithmétiques suggèrent une famille de problèmes qui exigent des techniques spécifiques d'attaque dont seul un petit nombre est aujourd'hui maîtrisé. Ces problèmes donneront du fil à retordre à des générations d'amateurs de récréations mathématiques : un nouveau chapitre du domaine ludique des carrés magiques vient de s'ouvrir !

Un carré magique classique est un tableau de nombres entiers, tous différents, possédant n lignes et n colonnes, ayant la rare propriété qu'en additionnant les nombres de chaque ligne ou de chaque colonne, on trouve toujours la même somme S. On exige aussi que le total des nombres de chacune des deux diagonales soit égal à S ; si ce n'est pas le cas, le carré est seulement « semi-magique ». Pour un carré de taille $n \times n$, cela conduit donc à $2n+2$ sommes de n nombres qui doivent toutes valoir S. On s'amuse parfois à satisfaire des contraintes supplémentaires : que les entiers utilisés soient consécutifs, ou que ce soient tous des nombres premiers, etc.

L'idée des carrés magiques d'aires est de prendre un carré magique classique, de taille $n \times n$, et de lui associer le découpage d'une surface carrée en n^2 formes correspondant aux n^2 cases du carré magique, avec la contrainte que chacune des n^2 formes du découpage doit avoir une aire proportionnelle au nombre correspondant du carré magique utilisé (*voir l'encadré 1, dessin b*).

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE CONSTRUCTION

Est-il toujours possible d'associer un carré magique d'aires à un carré magique usuel donné ? Est-ce difficile ?

La réponse est qu'il existe une méthode simple et systématique permettant d'associer, à chaque carré magique usuel connu, un carré >

CARRÉS GÉOMAGIQUES ET CARRÉS MAGIQUES D'AIRES

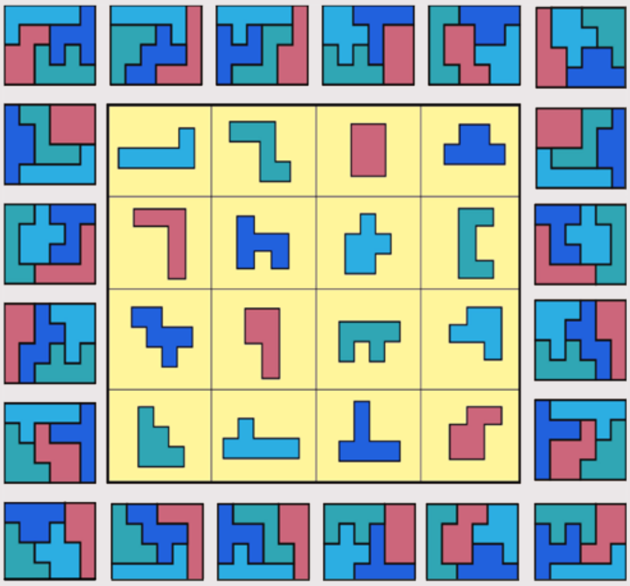
1

Dans le tableau central de formes donné en *a*, chacune des quatre rangées définit un puzzle aboutissant au rectangle de taille 6 × 4. Il en va de même pour chacune des quatre colonnes et pour les deux diagonales de ce tableau – un carré géomagique – découvert par Lee Sallows.

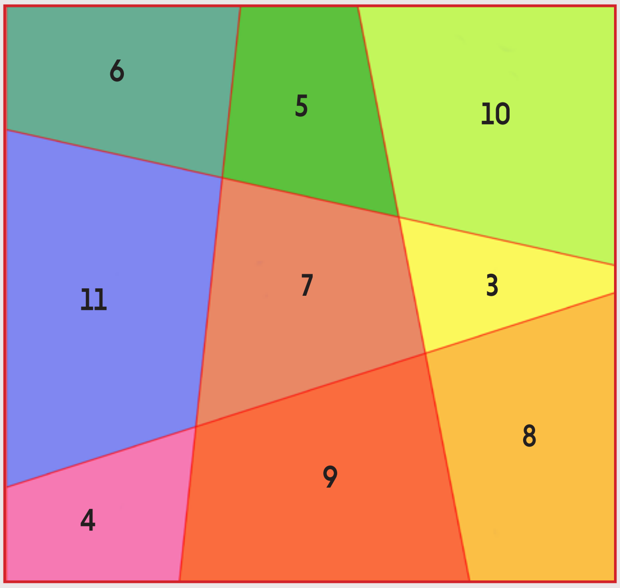
Dans le carré *b*, les lignes de découpe en 9 quadrilatères sont telles que l'aire de chacun est proportionnelle au nombre écrit : c'est un carré magique d'aires. Ce découpage a été trouvé par William Walkington par tâtonnement. Il n'était pas certain que la figure dessinée, qui est correcte quand on calcule avec deux décimales, le reste encore quand on exige plus de précision. Un programme de Walter Trump par une méthode d'approximation a précisé les coordonnées des points de la construction assurant une exactitude des contraintes sur les aires avec une précision de 14 décimales.

On a depuis prouvé que les équations exprimant les contraintes ont une solution exacte correspondant au dessin (donc avec une infinité de décimales), bien qu'aucune expression simple n'en ait été proposée. En *c* et *d* sont représentés des carrés magiques d'aires d'ordre 6 calculés par William Walkington.

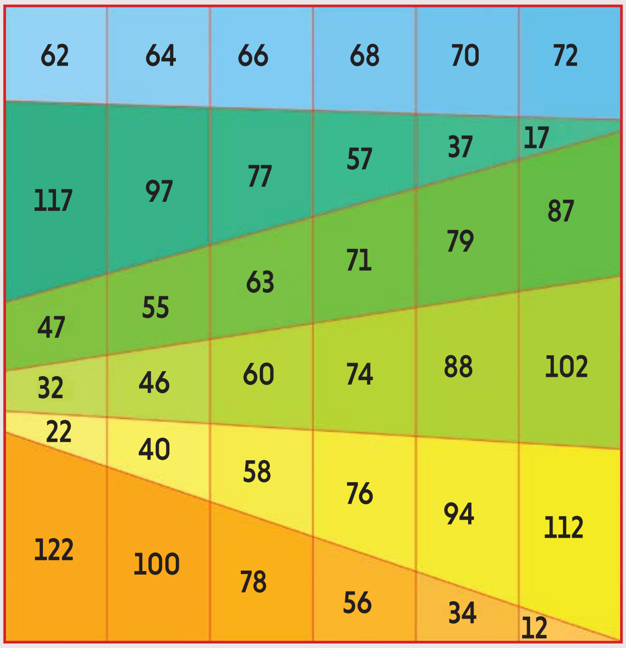
a



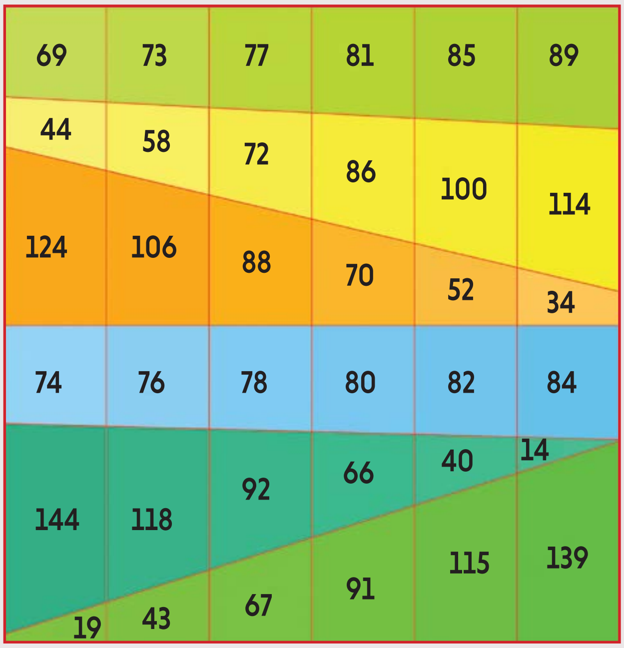
b



c



d



magique d'aires utilisant ses nombres. La méthode est absolument générale et semble donc résoudre le problème d'une manière rapide et définitive. Nous allons voir cependant qu'elle n'est pas totalement satisfaisante; c'est pourquoi nous ajouterons une contrainte supplémentaire dans la définition, ce qui rendra alors le problème plus délicat et fixera des défis intéressants.

En quoi consiste la méthode générale? On part d'un carré magique quelconque et du tableau dessinant les cases où sont placés les nombres. On déplace quelques segments verticaux délimitant ces cases afin que dans chaque ligne horizontale du carré magique initial, les cases carrées deviennent des rectangles aux aires proportionnelles aux nombres présents dans les cases (on peut, de la même façon, agir sur les colonnes de formes et déplacer des segments horizontaux).

Ces manipulations sont toujours possibles, justement parce que la somme des nombres d'une même ligne (ou d'une même colonne) est constante. Prenons un exemple de carré magique 3×3 où la somme est 15 (*voir l'encadré 2, dessin a*). On prend donc comme unité sur chaque segment horizontal 1/15 de la longueur du côté du carré à découper, et on déplace les segments verticaux pour que les bases des rectangles aient pour longueur 4/15, 9/15, 2/15 pour les cases de la première ligne. Pour la seconde ligne, les bases seront 3/15, 5/15, 7/15; et pour la troisième, elles seront 8/15, 1/15, 6/15. On obtient bien ce qu'on recherchait: les cases ont des aires proportionnelles aux nombres inscrits à l'intérieur (*voir l'encadré 2, dessin b*).

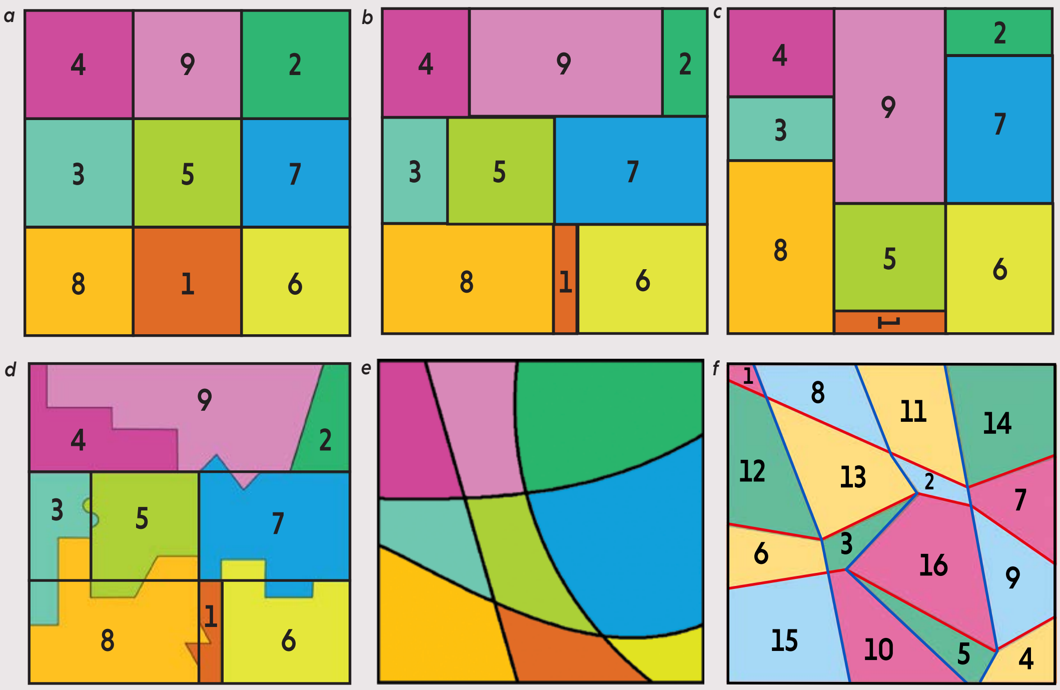
Il est bien clair que pour tout carré magique initial, la méthode produira un carré magique

2 TRANSFORMATIONS DES CARRÉS MAGIQUES D'AIRES

Dans la transformation par la méthode des rectangles, on déplace quelques segments internes délimitant les cases du tableau *a* de façon que les aires des rectangles obtenus soient proportionnelles aux nombres écrits en leur centre. On peut jouer sur les segments verticaux *(b)* ou faire coulisser des segments horizontaux *(c)*. On peut ensuite déformer les cases du carré sans en changer les aires : on déforme certaines des lignes, en prenant garde de ne changer aucune aire. Ici huit côtés de rectangles ont été remplacés par des lignes plus compliquées *(d)*. Dans la définition complète d'un carré magique d'aires, on exigera que le découpage consiste en lignes continues (et sans superpositions) joignant les bords opposés du carré mis en pièces *(e)*.

Malheureusement, la méthode des rectangles et sa généralisation ne produisent pas de tels découpages, et il faut donc chercher d'autres méthodes. Lorsque, en plus d'être continues et sans superpositions, on impose aux lignes de découpage d'être des segments de droite, les carrés magiques d'aires sont alors qualifiés de linéaires.

Au XVIIe siècle, le mathématicien français Frénicle de Bessy a énuméré exactement 880 carrés magiques d'ordre 4 utilisant les entiers de 1 à 16. Le carré magique d'aires associé à l'un d'eux *(f)* est obtenu par découpage du carré de base par trois lignes continues en bleu liant les côtés haut et bas du carré, et trois lignes continues en rouge liant les côtés droit et gauche (ce carré magique d'aires n'est pas linéaire).



d'aires – et même un second si, au lieu de jouer sur les lignes de cases, on joue sur les colonnes en faisant glisser quelques segments horizontaux (*voir l'encadré 2, dessin c*).

La méthode, comme Lee Sallows en a fait la remarque, se généralise et donne une infinité de carrés magiques d'aires associés à chaque carré magique particulier. Il suffit de partir du résultat de la mise en rectangles, et de modifier certains côtés des rectangles en remplaçant les droites par des lignes qui ne changent pas les aires. Si, par exemple, la ligne dévie vers la droite et diminue l'aire de la pièce à droite de la ligne, on s'arrange pour qu'elle dévie aussi vers la gauche de façon à «rendre ce qu'elle a pris». Ainsi, dans le dessin *d* de l'encadré 2, on est parti du carré magique d'aires obtenu par la méthode de la «mise en rectangles» et on a appliqué huit fois l'idée de la déformation qui ne change pas les aires; le carré magique d'aires obtenu est compliqué, mais correct.

Le défaut de la méthode des rectangles et de la méthode des déformations de segments est que les lignes qui délimitent les colonnes de formes sont des lignes brisées: les segments déplacés ne se rejoignent pas directement et, en conséquence, les lignes de découpe verticales n'apparaissent pas continues. Peut-on éviter ces inélégantes ruptures ?

ÉVITER LES INÉLÉGANTES LIGNES DE DÉCOUPAGE

L'exemple *b* de l'encadré 1 montre que oui et, puisque c'est possible au moins dans certains cas, ajoutons à la définition des carrés magiques d'aires formulée plus haut qu'on exigera que le découpage des formes provienne de $n-1$ courbes continues joignant le côté gauche du carré découpé à son côté droit, et d'autant de courbes continues joignant le côté haut du carré au côté bas, et cela sans que les deux types de courbes se superposent par endroits. Je vous épargne la longue et indigeste définition mathématique complète, car le dessin *e* de l'encadré 2 rend l'idée claire.

Le plus ancien carré magique que l'on connaisse est chinois: c'est celui de Luo Shu, du XIe siècle avant notre ère, et on le nomme «diagramme des neuf palais» (*voir l'encadré 3*). En plus des propriétés évoquées, il possède celle d'utiliser une fois exactement chaque nombre de 1 à 9. En ajoutant une unité à chaque case de ce carré millénaire, on obtient un carré magique utilisant une fois exactement chaque nombre de 2 à 10. En recommençant, on aura un carré magique utilisant une fois exactement les nombres de 3 à 11, et ainsi de suite.

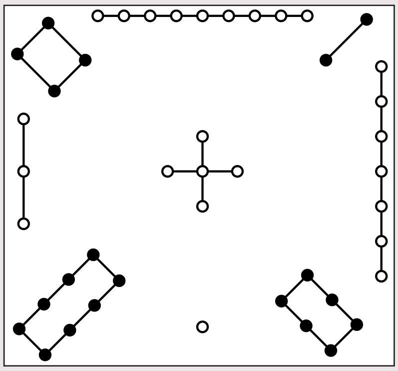
Ces carrés magiques les plus simples et les plus élégants possible intéressent particulièrement les amateurs. Bien sûr, une fois l'idée des carrés magiques d'aires formulée, ils ont voulu en trouver qui soient associés à ces modèles de base. Et pour plus de simplicité encore, ils ont voulu en trouver qui soient linéaires (n'utilisant pour le découpage que des droites comme dans l'exemple *b* de l'encadré 1). Est-ce toujours possible ?

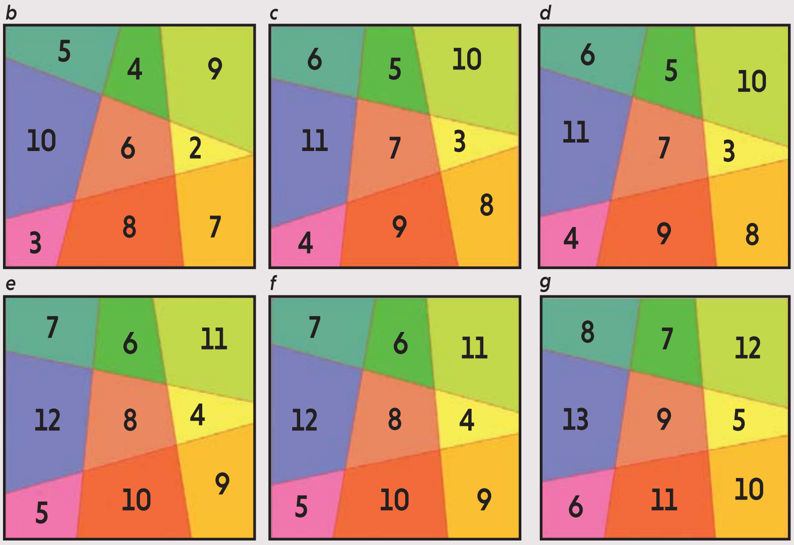
La réponse est venue d'un programme informatique de recherche systématique. Les résultats ont été indiqués dans l'encadré 3. >

3

LES CARRÉS MAGIQUES D'AIRES LINÉAIRES

Le carré magique de Luo Shu est connu en Chine depuis plus de 2 000 ans. Il est lié aux traditions mathématiques et divinatoires et c'est une configuration géométrique particulièrement appréciée dans le Feng Shui, l'art du placement des objets dans les lieux d'habitation. Il est composé des neuf entiers de 1 à 9. On le représente souvent avec des points liés *(a)*. La recherche d'un carré magique d'aires linéaire (où les lignes de découpe sont des segments de droite) fondé sur le Luo Shu a été vaine. Heureusement, on trouve des carrés magiques d'aires linéaires pour les entiers entre 2 et 10 (une solution, *b*), pour les entiers entre 3 et 11 (deux solutions, *c* et *d*), pour les entiers entre 4 et 12 (deux solutions, *e* et *f*), pour les entiers entre 5 et 13 (deux solutions, dont une seule est représentée ici, *g*).



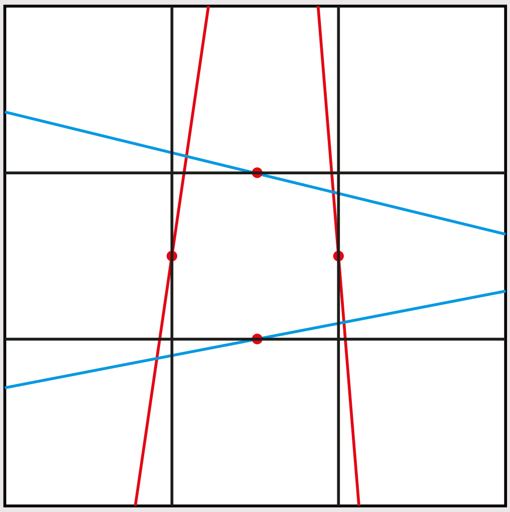


4

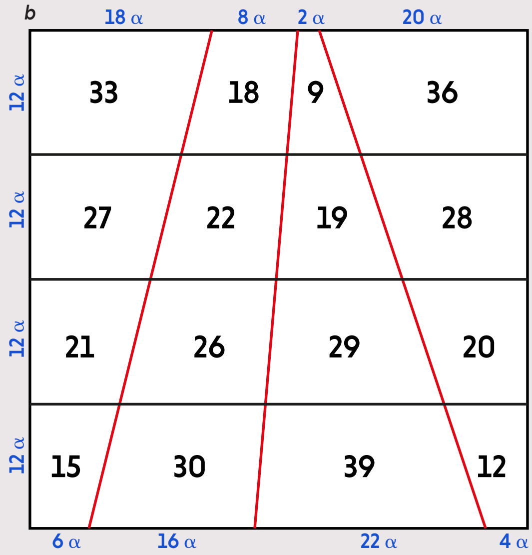
CONSTRUCTION DE CARRÉS D'AIRES MAGIQUES LINÉAIRES

Pour construire des carrés magiques d'aires linéaires de type 3 × 3, on trace des droites de découpage pouvant pivoter autour des points rouges *(a)*. Quand ces droites pivotent, la somme des aires des quadrilatères d'une même colonne ou d'une même ligne reste inchangée. On obtient donc, à l'exception des diagonales, un découpage qui satisfait la définition d'un carré magique d'aires linéaire. Le carré magique d'aires montré en *b* a été trouvé par Walter Trump ; ses points de construction ont des coordonnées entières si le paramètre α est entier.

a



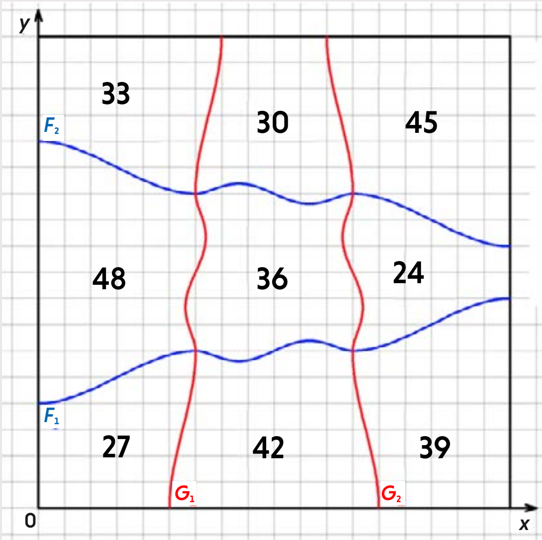
b

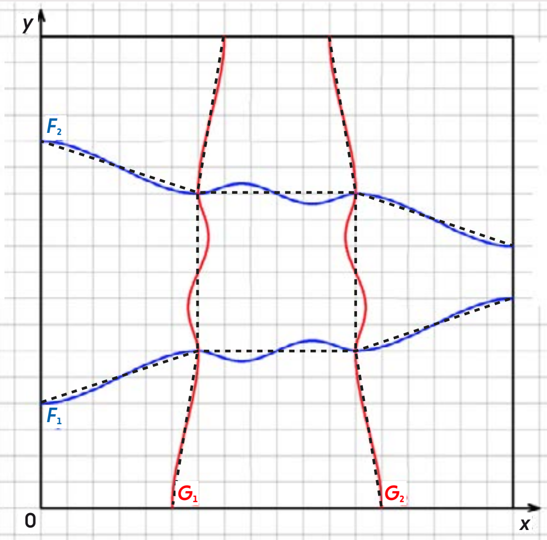


5

EN PRENANT DES COURBES BIEN LISSES…

La complexité de la figure ci-dessous à gauche (et des formules utilisées pour l'obtenir) n'est qu'apparente. On part d'un carré magique d'aires ayant exactement les mêmes 12 points de construction (deux sur le côté en haut du carré, quatre sur chacune des lignes bleues, et deux en bas) qui sont reliés par des segments de droite (*ci-dessous à droite*). On remplace ensuite ces segments par des courbes bien lisses et se recollant parfaitement, sans changer les aires des neuf morceaux du découpage (les lignes utilisées ayant localement des centres de symétrie).





$$F_1(x) = \begin{cases} H(54, 3, 5, x) & \text{quand } 0 \le x < 6 \\ J(x) & \text{quand } 6 \le x < 12 \\ H(54, 15, 7, x) & \text{quand } 12 \le x < 18 \end{cases}$$

$$G_1(y) = \begin{cases} H(108, 3, 11/2, y) & \text{quand } 0 \le y < 6 \\ J(y) & \text{quand } 6 \le y < 12 \\ H(108, 15, 13/2, y) & \text{quand } 12 \le y < 18 \end{cases}$$

$F_2(x) = 9 - F_1(x)$ $\quad G_2(y) = 9 - G_1(y)$ $\quad H(a, x_0, y_0, x) = (x - x_0)(x - x_0 - 27)/a + y_0$ $\quad J(x) = (9 - x)[(9 - x)^2 - 9]^2/180 + 6$

> La méthode pour parvenir à des résultats, soit négatifs (inexistence de certains types de carrés), soit positifs (détermination des coordonnées des points permettant la construction) repose sur une idée assez simple quand il s'agit des carrés magiques d'aires à neuf cases, et qui est la base du programme informatique donnant les solutions présentées dans l'encadré 3.

UNE MÉTHODE POUR LES CARRÉS MAGIQUES D'AIRES LINÉAIRES DE 9 CASES

On considère quatre droites qui pivotent autour des points situés au milieu des quatre droites découpant le carré en neuf cases de même taille (*voir l'encadré 4*). On remarque par exemple que lorsque la droite pivotant autour du point milieu situé en haut bouge, la somme des aires des trois quadrilatères du haut reste constante et égale à 1/3 de l'aire totale du carré. Il en va de même pour les trois quadrilatères situés à droite, dont la somme des aires reste constante quand on fait pivoter la ligne de découpe de gauche, et de même encore pour les trois quadrilatères situés en bas ou à gauche.

On en déduit que la somme des aires des trois quadrilatères de la colonne centrale reste aussi constante quand les quatre lignes pivotent, de même que la somme des aires des trois quadrilatères de la ligne centrale. À l'exception des conditions sur les diagonales, qu'il faut traiter à part, en faisant tourner les quatre droites et en évitant les situations créant des intersections non voulues, on a donc toujours un carré magique d'aires linéaire.

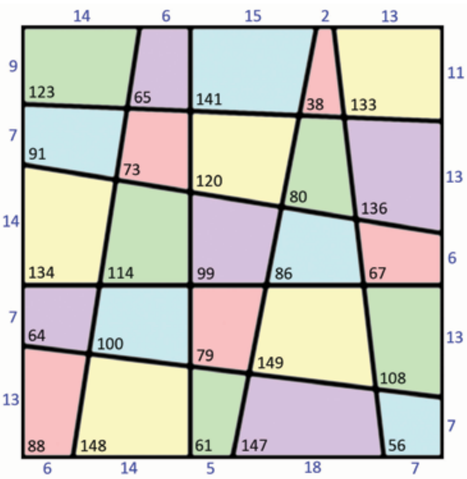
En outre, tous les carrés magiques d'aires linéaires pour un découpage en neuf du carré seront des cas particuliers de ce schéma. Seuls quatre paramètres (les angles des droites pivotantes) déterminent une configuration, et donc l'exploration systématique de toutes les possibilités devient envisageable. C'est elle qui a permis de découvrir les résultats mentionnés. On trouvera plus de détails sur la méthode sur le site internet de l'Allemand Walter Trump, à l'adresse: www.trump.de/magic-squares/area-magic/Third-Order%20Linear%20Area%20Magic%20Squares.pdf

Si on n'exige plus que les nombres utilisés soient consécutifs, les carrés magiques sont bien plus nombreux. On peut donc imposer aux découpages des contraintes encore plus fortes et, par exemple, n'accepter que les découpages où toutes les courbes joignant le côté droit au côté gauche du carré soient parfaitement horizontales. Le dessin *b* de l'encadré 4 représente un tel carré magique d'aires d'ordre 4, trouvé par Walter Trump. En prenant un nombre entier pour le paramètre α, on a un carré magique d'aires dont toutes les coordonnées des points de construction sont des nombres entiers, ce qui rend facile la vérification de son exactitude.

Toutes sortes d'idées ont été explorées, mais le champ ouvert est sans limites

Plus esthétiques, mais plus difficiles à calculer, les carrés magiques d'aires où les lignes de découpage sont de belles courbes continues non rectilignes ont aussi été l'objet de recherches. L'encadré 5 en montre une avec les équations des courbes utilisées.

Pour trouver des carrés magiques d'aires d'ordre 5, Walter Trump a proposé d'en assouplir un peu la définition: il ne recherche que ceux dont les coordonnées des points de construction sont des entiers, mais il exige pour les aires une condition moins forte que celle de la définition complète: «L'entier le plus proche de l'aire de chacune des formes doit être égal au nombre correspondant du carré magique servant de base.» Il dénomme ces constructions des carrés magiques d'aires arrondis (*rounded aera-magical-square*). On a représenté ci-dessous un carré magique d'aires arrondi d'ordre 5.



On le voit, toutes sortes d'idées ont été explorées, mais le champ ouvert est sans limites, et la moisson de configurations associant magiquement arithmétique et géométrie ne fait que commencer. ■

BIBLIOGRAPHIE

W. Trump, **Area magic squares**, https://bit.ly/2J7u9sP, consulté le 26/1/2018.

W. Walkington, **Area magic squares and tori of order 3**, https://bit.ly/2J3zKkd, consulté le 26/1/2018.

W. Walkington, **Area magic squares and tori of order 4**, https://bit.ly/2pSUamZ, consulté le 26/1/2018.

J. Van Delden, **Area magic squares of order 3**, 5 mars 2017 (PDF téléchargeable sur https://bit.ly/2GKkha6).

L. Sallows, **Geometric Magic Squares. A Challenging New Twist Using Colored Shapes Instead of Numbers**, Dover, 2013.