RENDEZ-VOUS

UN GRAPHE UNIVERSEL ET SINGULIER

Qu'un seul nombre puisse contenir, dans ses décimales, tous les autres est déjà un fait étrange et troublant. Mais le monde des graphes présente une situation analogue encore plus surprenante, qui frôle le paradoxe.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (Cristal)

Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Les nombres universels contiennent toutes les images numériques, tous les textes possibles, et tous les nombres finis ou infinis, y compris eux-mêmes une infinité de fois. De même, le «graphe universel de Rado» contient tous les graphes finis ou infinis. Il existe cependant une différence importante entre ces deux universels : il y a une infinité de nombres universels, alors que le graphe universel de Rado est unique. Il est l'un de ces objets mathématiques aux propriétés déconcertantes dont les chercheurs découvrent l'existence avec stupeur et émerveillement. Aventurons-nous dans ce monde étrange de l'universalité mathématique.

LES NOMBRES UNIVERSELS

En choisissant successivement des chiffres au hasard a_1, a_2, a_3, ..., par exemple avec un dé à dix faces et en les prenant comme les décimales successives d'un nombre commençant par 0, on définit un nombre réel u compris entre 0 et 1 : $u=0,a_1a_2a_3$... Nous considérons ici l'écriture des nombres en base 10, mais ce que nous allons affirmer s'étend à toute base de numération.

Si votre dé est équilibré, c'est-à-dire si chaque face tombe avec une probabilité de 1/10, le nombre u est un nombre universel, ou «nombre univers», ou «nombre disjonctif». Par définition, cela signifie que toute suite finie de chiffres se situe quelque part après la virgule, en un seul bloc, dans les décimales de u.

Dans u, vous trouverez donc par exemple 20 fois de suite le 7, ou 1000 fois de suite le 0, ou la séquence 19982018. Cela signifie aussi que si vous codez la photo de votre grand-père par une suite de chiffres, par exemple avec un million de chiffres lus comme des niveaux de gris et qui, disposés en un carré de 1000 pixels sur 1000, reproduisent la photo, alors cette photo de votre grand-père est quelque part dans ce nombre universel. Bien sûr, dans u, il y a aussi la photo de votre chat, celle de Georg Cantor, celle de la tour Eiffel en construction en janvier 1888, celle de Neil Armstrong posant le pied sur la Lune le 20 juillet 1969, etc. En utilisant un codage où deux chiffres consécutifs définissent un numéro de lettre, vous trouverez aussi dans le nombre universel u le texte des *Éléments* d'Euclide, la déclaration universelle des droits de l'homme en serbo-croate, *Le Capital* de Karl Marx écrit en français à l'envers et en supprimant la page 666, et même le texte de cet article ou le récit en dix pages de votre journée de demain. Je n'insiste pas, à vous d'imaginer.

La méthode du dé à dix faces pour définir un nombre universel n'est pas parfaitement satisfaisante, car elle fait intervenir le hasard et qu'il faut attendre un temps infini pour en disposer ! Une autre méthode, cette fois déterministe, proposée par David Champernowne, un ami d'Alan Turing, consiste à écrire les uns derrière les autres les chiffres des entiers : le nombre de Champernowne Ch=0,12345678910111213141516 17181920212223... est universel. Concaténer les nombres premiers donne aussi un nombre universel.

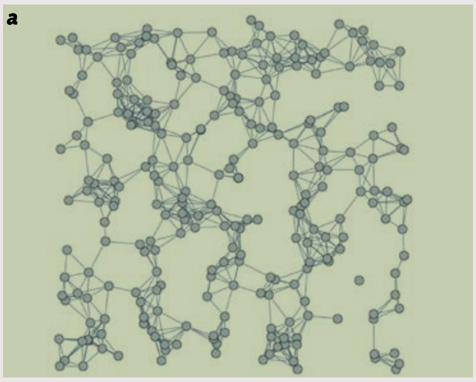
Par définition, les nombres universels contiennent toutes les suites finies possibles de >

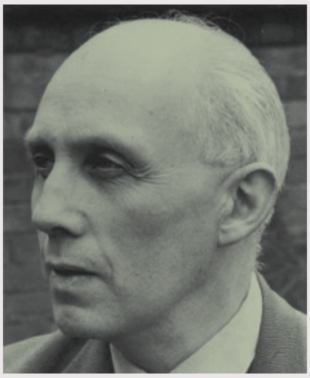
TOUS LES GRAPHES SONT DANS LE GRAPHE DE RADO

1

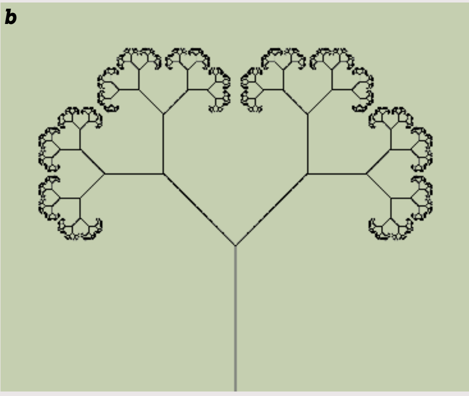
Partout en mathématiques, en informatique et dans bien d'autres domaines, on rencontre des graphes finis (c'est-à-dire qui ont un nombre fini de nœuds) ou infinis. Le graphe *a* est un graphe aléatoire, produit par un programme écrit en Mathematica (https://mathematica.stackexchange.com/questions/38589/random-geometric-graph-generation-problem?rq=1). Le graphe *b* est un arbre binaire infini : chaque branche se divise en deux branches symétriques. Le graphe *c* est un graphe aléatoire dont on a fait tendre la longueur des arcs vers zéro. Ces graphes, ainsi d'ailleurs que tous les autres, sont présents dans le graphe de Rado *(d)*, dont la structure contient toutes les structures de graphes (finis ou infinis) possibles. Les nœuds du graphe de Rado sont identifiés par les entiers naturels. Les arêtes sont déterminées par la règle suivante. Si x et y sont deux nombres entiers, avec $x < y$, il existe une arête les reliant si le x-ième chiffre (en comptant à partir de la droite et en partant de 0) de y écrit en binaire est un 1.

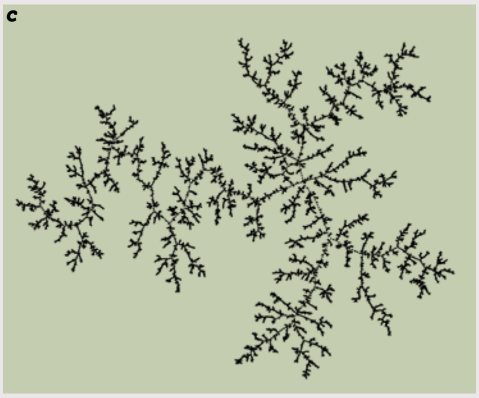
Prenons l'exemple $x = 2$, $y = 5$. L'écriture binaire de y est 101, dont le 2e chiffre à partir de la droite, en comptant à partir de 0, est 1. On a donc une arête entre les nœuds 2 et 5. En revanche, pour $x = 1$ et $y = 5$, il n'y a pas d'arête reliant ces deux nœuds, car le 1er chiffre à partir de la droite (en comptant à partir de 0) de l'écriture binaire (101) de y est 0.

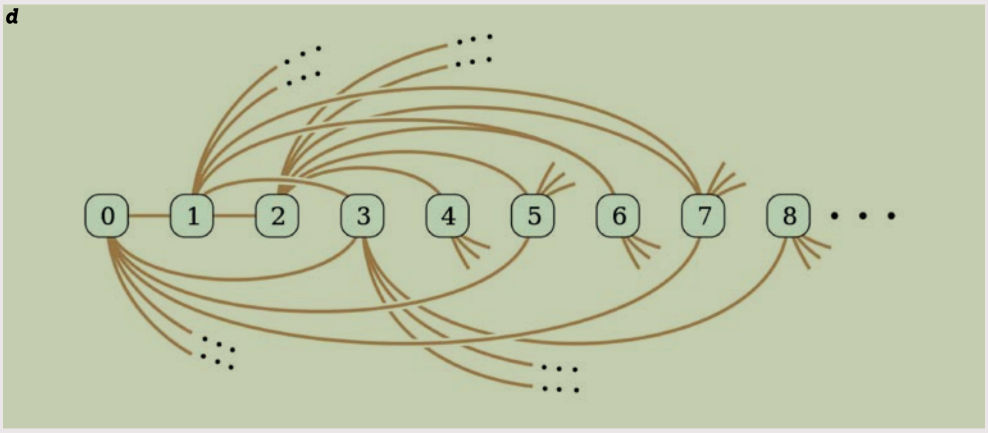




Richard Rado, né en 1906 à Berlin d'un père hongrois, est mort en Grande-Bretagne en 1989, où il avait émigré en 1933 après l'arrivée des nazis au pouvoir.







> chiffres comme sous-suite de chiffres consécutifs. Ces nombres sont universels dans un autre sens: ils contiennent tous les nombres réels compris entre 0 et 1, quel que soit leur développement décimal infini. Le sens de «contient» n'exige pas, cette fois, que les chiffres pris en considération soient consécutifs: le nombre $r=0,a_1a_2a_3...$ contient le nombre $s=0,b_1b_2b_3...$ si dans r on trouve dans l'ordre les chiffres de s. Le nombre $r=0,1234321234321234321...$ contient par exemple le nombre $s=0,123123123123$; on a souligné ce qui permet de l'affirmer. L'inverse n'est pas vrai: s ne contient pas r.

Si r et r' sont deux nombres universels, alors r contient r', et r' contient r. Cela semble un peu paradoxal, mais à tort: l'infini le permet. Cette propriété de double inclusion est amusante, bien que ce soit une conséquence facile de la première définition. En effet, si un nombre vérifie la première définition (toute suite finie y figure en un seul bloc), alors elle contient une infinité de fois le 0, une infinité de fois le 1, etc. Trouver dans l'ordre une suite infinie quelconque de chiffres est donc toujours possible.

De multiples calculs et tests font soupçonner, sans qu'on ait encore su le démontrer, que les nombres suivants, dont on ne considère que ce qui est derrière la virgule, sont universels: π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, log 2. C'est le cas aussi pour bien d'autres nombres rencontrés en analyse: ils semblent universels sans qu'on sache l'établir rigoureusement. Tout ce qui concerne les nombres universels n'est heureusement pas aussi difficile à prouver. Voici quelques propriétés qui ont été démontrées.

Dans les chiffres d'un nombre universel, toute suite finie de chiffres est présente (en un seul bloc) non pas une fois, mais une infinité de fois; donc, quand un nombre est universel, si on modifie un nombre fini de chiffres soit en les supprimant soit en les remplaçant par d'autres, il reste universel.

Si l'on ne retient qu'un chiffre sur deux d'un nombre universel, il le reste. Il en est de même quand on prend régulièrement un chiffre sur k dans ses décimales. Pour le nombre de Champernowne, enlever un chiffre sur deux donne: $Ch'=0,1357901234567890123456789012 3456789...$

On peut retirer d'un nombre universel tout autre nombre et obtenir que le reste soit encore un nombre universel. Idée de la démonstration: quand on cherche à retirer un chiffre, ne pas retirer le premier qui se présente, mais le suivant. Par exemple, si l'on cherche à retirer 0,123123123123123... de 0,123456123456123456... prendre le second 1 (*surligné*), le second 2 qui se présente ensuite (*surligné*), le second 3 qui se présente ensuite, etc.

Il résulte de la propriété précédente que l'on peut retirer un nombre universel de lui-même... et recommencer une infinité de fois: un nombre universel est infiniment présent en lui-même. Les fractales ont des propriétés analogues, mais à la condition de changer d'échelle, ce qui n'est pas le cas ici.

Ce que l'on vient de voir pour les nombres universels est étrange. Ce que l'on va découvrir maintenant au sujet des graphes universels l'est encore plus, en particulier quant au lien qui existe entre les deux notions d'universalité.

GRAPHES FINIS ET INFINIS

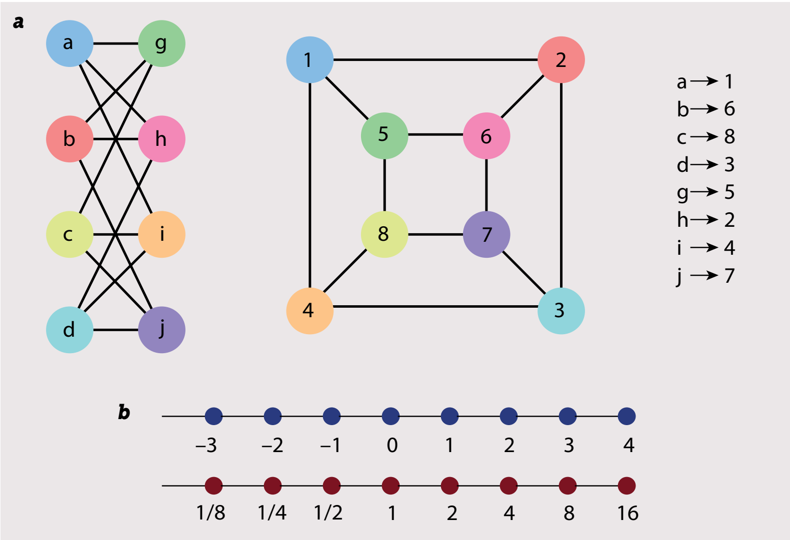
Fixons le vocabulaire. Un graphe est un ensemble fini $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ ou infini «numérotable» $\{a_0, a_1, ..., a_n, ...\}$ de points, les «nœuds» du graphe, qui peuvent être liés par des «arêtes». Entre deux nœuds, soit il y a une arête (une seule), soit il n'y en a pas. Les arêtes ne sont pas orientées ($ab=ba$), et on ne s'autorise pas à relier un nœud directement à lui-même.

Un exemple de graphe infini est celui dont les nœuds sont étiquetés par les entiers positifs ou négatifs, avec une arête reliant chaque couple de nombres consécutifs n, $n+1$ (*voir l'encadré 2*). Autre exemple: le graphe complet reliant tous les entiers, où chaque entier est lié par des arêtes à tous les autres.

Deux graphes G et H sont «isomorphes» s'il est possible de remplacer les noms des nœuds de G par ceux des nœuds de H de telle façon que les arêtes du graphe G' ainsi obtenu coïncident

2 ISOMORPHISME DE GRAPHES

Deux graphes qui ont la même structure sont dits isomorphes : en renommant les nœuds d'un des deux graphes on obtient exactement l'autre graphe. Ainsi, les deux graphes finis représentés en *(a)* sont isomorphes par la transformation indiquée à droite. Le schéma *(b)* donne un exemple de graphes infinis isomorphes par la transformation $n \to 2^n$.



exactement avec celles de H. Autrement dit, deux graphes sont isomorphes s'ils ont exactement la même structure.

Par exemple, considérons le graphe infini H dont les nœuds sont étiquetés par les nombres de la forme 2^n, où n est un entier positif ou négatif, et où une arête relie chaque couple de nombres (2^n, 2^{n+1}). Il est facile de voir que les deux graphes G et H, où G est l'exemple donné plus haut, sont isomorphes: en renommant 2^n chaque nœud n de G, on passe de G à H.

Un graphe G est considéré comme un sous-graphe du graphe H si chaque nœud de G est aussi un nœud de H et si les arêtes de G et de H reliant ces nœuds communs sont les mêmes. Dit plus simplement: on ne regarde dans H que les nœuds de G et leurs liens, et cela donne G. Lorsqu'un graphe H est isomorphe à un sous-graphe du graphe G, on dit simplement que H est inclus dans G ou que G contient H (*voir l'encadré 3*).

Les graphes finis inclus dans le graphe complet dont les nœuds sont les entiers (chaque entier étant lié à tous les autres) sont les graphes complets sur les ensembles finis. Bien que très dense, le graphe complet des entiers ne contient donc pas tous les graphes finis possibles (puisque les sous-graphes du graphe complet sont toujours des graphes complets, le graphe complet ne contient pas certains graphes finis).

Ces notions de graphes sont utiles dans une multitude de domaines: pour représenter des chemins, des dessins, des réseaux ou même des relations abstraites – par exemple commerciales, d'autorité ou de parenté.

LE GRAPHE DE RADO

Le graphe de Rado, aussi dénommé «le graphe aléatoire», ou «le graphe universel» a été découvert en 1964 par le mathématicien allemand Richard Rado; il avait été entrevu par l'Allemand Wilhelm Ackermann en 1937, puis par les Hongrois Paul Erdős et Alfréd Rényi en 1963.

La définition proposée par Rado est un peu rébarbative. Les nœuds du graphe de Rado sont les nombres entiers (*voir le dessin dans l'encadré 1*), il s'agit donc d'un graphe infini. Si x et y sont deux entiers, avec $x<y$, il y a une arête entre x et y si le x-ième chiffre (en comptant à partir de la droite et en partant de 0) de y écrit en base 2 est un 1.

Prenons l'exemple de $x=4$ et $y=23$. L'entier 23 s'écrit $\underline{1}0111$ en base 2; son quatrième chiffre en partant de la droite et en comptant à partir de 0 est un 1 (*souligné*): il y a donc une arête entre 4 et 23 dans le graphe de Rado. Il n'y en a pas entre 3 et 23. Il y en a une entre 2 et 23, entre 1 et 23 et entre 0 et 23.

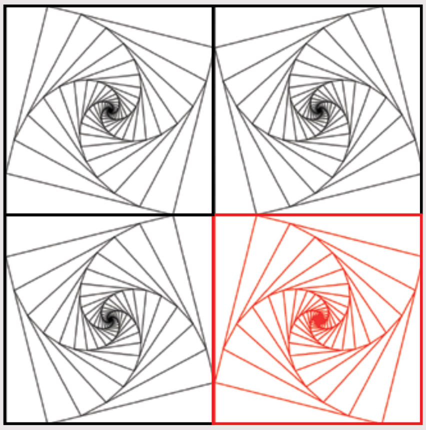
Le graphe de Rado est universel dans le sens suivant: il contient tout graphe fini et même tout graphe infini. Qu'il puisse exister >

3

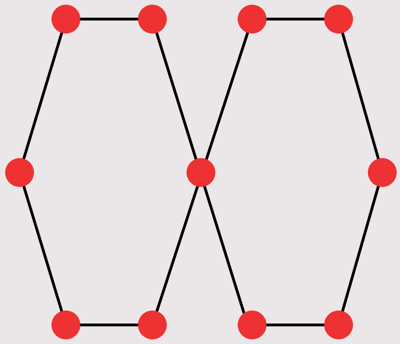
UN GRAPHE CONTENU DANS UN AUTRE

On dit qu'un graphe H est un sous-graphe de G (ou que H est contenu dans G, ou que G contient H) si les nœuds de H sont des nœuds de G, et si les arêtes de H se déduisent des arêtes de G. Si H est isomorphe à un sous-graphe de G, on dit aussi que H est contenu dans G.
Exemple 1 : la partie en rouge du graphe infini dessiné ci-dessous *(a)* est un sous-graphe infini de ce graphe.
Exemple 2 : le graphe *(b)* ci-dessous contient le graphe cyclique à 6 nœuds, et le contient même deux fois, mais il ne contient pas le graphe linéaire à 11 nœuds, car quand on prend un sous-graphe d'un graphe G, on doit prendre toutes les arêtes de G qui joignent les nœuds retenus.
Exemple 3 : le graphe ligne 0 — 1 — 2 — ... est inclus dans le graphe ... — (– 3) — (– 2) — (– 1) — 0 — 1 — 2 — 3 — ...
Exemple 4 : Le graphe complet à 6 nœuds (chaque nœud est lié à tous les autres) est contenu dans le graphe complet à 7 nœuds.

a



b



> un graphe contenant tout graphe fini et tout graphe infini est étonnant: toutes les structures de graphes sont donc là, cachées dans cette histoire de décomposition en base 2 qui fixe les arêtes du graphe de Rado! Mais il y a encore d'autres surprises.

Nous donnons les idées des démonstrations de ce que nous affirmons. Comprendre est à la portée de chacun, moyennant un petit effort. Bien des démonstrations pour les nombres universels n'exigent rien d'autre qu'un peu d'abstraction et de concentration, et il en est de même ici. Cependant, si les démonstrations vous rebutent ou vous ennuient, lisez seulement les affirmations en sautant les justifications entre les mots DÉBUT et FIN, et faites confiance aux chercheurs qui ont découvert et vérifié soigneusement tout cela… moi en particulier, car je n'y croyais pas!

Avant d'énoncer la première affirmation, il faut donner la définition suivante, qui sera le pivot de tous les arguments.

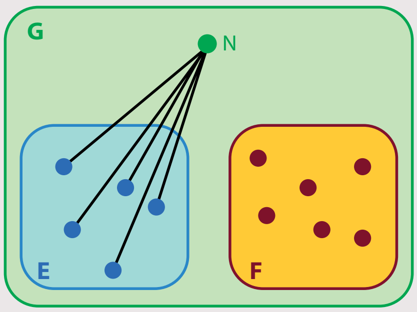
L'EXTENSION AU CENTRE DE TOUT

On dit qu'un graphe infini G a la propriété d'extension si, pour tout couple E et F d'ensembles finis disjoints de nœuds de G, il existe un nœud N de G qui est lié à chacun des nœuds de E et à aucun de F (*voir l'encadré 4*).

4 LA PROPRIÉTÉ D'EXTENSION

Un graphe infini G possède la propriété d'extension si, pour tout couple E et F d'ensembles finis disjoints de nœuds de G, il existe un nœud N de G qui est lié à chaque nœud de E et à aucun de F *(idée très schématiquement illustrée ci-dessous)*.

On montre qu'un graphe ayant cette propriété (c'est le cas du graphe de Rado) contient tout graphe, fini ou infini.



AFFIRMATION. Le graphe de Rado a la propriété d'extension.

DÉBUT Soit n un entier supérieur à chaque nombre de E et chaque nombre de F. On prend pour nœud celui numéroté N, où N est l'entier dont le développement binaire comporte n chiffres binaires (c'est donc un nombre assez grand) et qui est tel qu'il y a un 1 en position e pour chaque nœud e de E et un 0 en position f pour chaque nœud f de F. Si par exemple E={0, 2, 4, 8} et F={3, 7}, on prendra N=100010101. FIN

Le point important de cette petite théorie réside dans l'énoncé suivant.

AFFIRMATION. Deux graphes infinis qui ont la propriété d'extension sont isomorphes; autrement dit, ils ont exactement la même structure, qui est donc, compte tenu de l'affirmation précédente, celle du graphe de Rado.

DÉBUT Soient G et H deux graphes ayant la propriété d'extension. Notons a_0, a_1, … les nœuds de G et b_1, b_2, … ceux de H. Pour montrer que G et H sont isomorphes, on va renommer progressivement leurs nœuds de telle façon qu'avec les nouveaux noms, il sera évident que G et H ont exactement les mêmes arêtes.

Étape 0. On choisit un nœud quelconque c_0 de G et un nœud quelconque c_0' de H.

Étape 1. On choisit maintenant un nœud c_1 de G différent de c_0. Dans H, on prend alors, pour c_1', un nœud différent de c_0' qui est lié à c_0' si c_1 est lié à c_0 dans G, et qui n'est pas lié à c_0' sinon. Un tel c_1' existe nécessairement, car H vérifie la propriété d'extension. Le sous-graphe de G déterminé par c_0c_1 et le sous-graphe de H déterminé par c_0'c_1' sont, par construction, isomorphes.

Étape 2. On prend maintenant un nœud c_2' quelconque de H différent de c_0' et de c_1'. On choisit dans G un nœud c_2 qui est lié à c_0 et c_1 dans G de la même façon que c_2' est lié dans H à c_0' et c_1'. C'est possible d'après la propriété d'extension de G. Le sous-graphe de G déterminé par $c_0c_1c_2$ et le sous-graphe de H déterminé par c_0'c_1'c_2' sont, par construction, isomorphes.

Étape 3. On prend maintenant un nœud c_3 quelconque de G différent de c_0, c_1 et c_2. On choisit dans H un nœud c_3' qui est lié à c_0', c_1' et c_2' dans H de la même façon que c_3 est lié dans G à c_0, c_1 et c_2. C'est possible d'après la propriété d'extension de H. Et ainsi de suite.

On continue de cette façon en s'arrangeant pour que les choix faits alternativement dans G et H épuisent bien tous les nœuds de G et H, ce qui est possible en prenant à chaque étape le nœud de plus petit numéro non déjà utilisé. Par construction, les liens dans G entre c_0, c_1, c_2, … et les liens dans H entre c_0', c_1', c_2', … sont exactement les mêmes. Cela montre que G et H ont exactement la même structure: ils sont isomorphes.

Tous les graphes ayant la propriété d'extension sont donc isomorphes entre eux; il n'y a donc qu'une seule sorte de graphe ayant la propriété d'extension, et cette structure est celle du graphe de Rado. FIN

On démontre aussi, par un procédé très proche du précédent, que tout graphe ayant la propriété d'extension contient tout graphe fini ou infini, autrement dit qu'il est universel.

TOUT GRAPHE ALÉATOIRE ET INFINI DONNE LE GRAPHE DE RADO

On construit un graphe aléatoire infini en se donnant un ensemble infini de nœuds $a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ et en tirant à pile ou face pour chaque couple de nœuds $a_i a_j$ afin de déterminer si on les lie par une arête (par exemple oui si c'est pile, non si c'est face). On prouve qu'un tel graphe est isomorphe au graphe de Rado.

Les graphes finis aléatoires sont définis comme précédemment: un tirage aléatoire détermine si on place une arête entre deux nœuds. Leur étude conduit à une théorie importante qui donne lieu à une multitude de résultats délicats et profonds, dont une bonne partie est due au célèbre et prolifique mathématicien hongrois Paul Erdős.

Le résultat concernant l'unicité du graphe de Rado rend impossible une théorie analogue pour les graphes aléatoires infinis, qui sont tous isomorphes. Cette situation est inhabituelle, car en général le passage du fini à un infini fondé sur les mêmes idées donne naissance à une théorie plus complexe et difficile. Ici, c'est l'inverse: la théorie des graphes aléatoires finis est riche, difficile et complexe, tandis que la théorie des graphes aléatoires infinis se réduit à peu de choses et est au fond assez simple. Dans leur livre *Probabilistic Methods in Combinatorics* (1974), Erdős et Joel Spencer l'ont affirmé clairement: le résultat d'unicité des graphes infinis aléatoires «démolit la théorie des graphes infinis aléatoires».

UNE INVARIANCE EXTRÊME

Un peu comme les nombres universels, dont chacun contient tous les autres et qui sont résistants par modification finie, le graphe de Rado est lui aussi invariant par modification finie. Mais, cette fois, le résultat de la modification est plus spectaculaire, puisque le graphe d'une modification est le graphe lui-même: enlever des morceaux finis ne le change pas et le couper en deux le maintient intact. Mieux que les fractales, figures que l'on retrouve en plus petites en elles-mêmes, ici on retrouve le graphe de Rado en lui-même, exactement, sans la moindre modification.

AFFIRMATION. En enlevant un nombre fini de nœuds, ou en changeant un nombre fini d'arêtes, on ne change pas le graphe de Rado. En séparant en deux le graphe de Rado (on sépare les nœuds en deux sous-ensembles disjoints et complémentaires), l'un des morceaux est le graphe de Rado.

À chaque fois, la démonstration se fonde sur la propriété d'extension dont on voit qu'elle persiste. Notons que la dernière propriété n'est pas vraie pour les nombres universels: si l'on répartit les chiffres d'un nombre universel en deux, il se peut qu'aucun des deux nombres obtenus ne soit universel: il suffit de mettre tous les 0 dans l'un des morceaux et tous les 1 dans l'autre.

On a un sentiment d'étrangeté et de magie face à cet objet mathématique singulier

UN LIEN ENTRE NOMBRES UNIVERSELS ET GRAPHES UNIVERSELS

On pouvait s'attendre à ce qu'il existe un lien entre les nombres universels et le graphe universel de Rado. C'est le cas! On commence par associer un graphe infini G_r à chaque nombre réel r compris entre 0 et 1, en procédant de la façon suivante. On écrit r en base 2, $r = 0{,}a_1 a_2 a_3 \dots$, on prend comme ensemble de nœuds du graphe G_r l'ensemble des entiers relatifs … −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, … et on décide qu'il y a une arête entre deux nœuds n et m, avec $n>m$, si et seulement si le chiffre binaire en position $n-m$ dans r est 1. Le nombre de Champernowne en base 2, Ch_2=0,0 1 10 11 100 101 110 111 …, définit un tel graphe. On démontre que le graphe défini par un nombre universel en base 2 a la propriété d'extension et donc qu'il est toujours le même graphe infini: le graphe universel de Rado.

Nous n'avons pas évoqué certaines autres définitions inattendues du graphe de Rado; il en existe par exemple une fondée sur les nombres premiers. Elles accroissent encore le sentiment d'étrangeté et de magie ressentie face à cet objet mathématique singulier. Le monde de l'infini mathématique dépasse parfois l'entendement. Bien que tout se démontre et même quand on comprend chaque point des démonstrations, l'émerveillement persiste… ainsi que, peut-être, un certain doute. ■

BIBLIOGRAPHIE

Wikipedia, **Rado graph**, 2018.

C. Biró et U. B. Darji, **Generating infinite random graphs**, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. 61(3), pp. 847-868, 2018 (arxiv.org/pdf/1205.3198.pdf).

R. Elwes, **Preferential attachment processes approching the Rado multigraph**, arXiv:1502.05618v3, 2017.

M. S. Kurilić et S. Todorčević, **Copies of the random graph**, *Advances in Mathematics*, vol. 317, pp. 526-552, 2017.

P. J. Cameron, **The random graph**, dans *The Mathematics of Paul Erdős*, vol. II (éd. R. Graham et J. Nešetřil), pp. 333-351, Springer, 1997 (arXiv:1301.7544, 2013).

J.-P. Delahaye, **Les nombres univers**, *Pour la Science* n° 225, pp. 104-107, juillet 1996.